

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

УДК 629.782 (574)

На правах рукописи

ЗАДАУЛЫ АКЕРКЕ ЕРКИНОВНА

**Численное моделирование высокоскоростного течения в камере
сгорания со вдувом возмущенной струи**

6D074600 - Космическая техника и технологии

Диссертация на соискание ученой степени
доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант:
доктор физико-математических наук,
Бекетаева А.О.

Зарубежный научный консультант:
профессор Технического института Карлсруэ
доктор технических наук,
Ульрих Маас

Республика Казахстан
Алматы, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ	
ВВЕДЕНИЕ.....	6
1 СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА	11
1.1 Методы моделирования турбулентности.....	11
1.2. Турбулентное истечение газовых струй.....	29
1.3. Исследование вдува горизонтальной турбулентной струи в спутный поток с целью улучшения смешения.....	37
1.4. Выводы.....	41
2 ПОСТАНОВКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ТЕЧЕНИЯ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ В СПУТНЫЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ПОТОК.....	42
2.1. Вывод основных уравнений, осредненных по LES (Large eddy simulation).....	42
2.2. Построение алгоритма решения уравнений с применением ENO- схемы.....	51
3 ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ	57
3.1. Постановка задачи трехмерного слоя смешения.....	57
3.2. Спектральный анализ анизотропной турбулентности.....	59
3.3. Сравнительный анализ результатов численного моделирования с экспериментом.....	61
3.4. Выводы.....	65
4 ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ВЫСОКОСКОРОСТНАЯ ТУРБУЛЕНТНАЯ СТРУЯ В СПУТНОМ ПОТОКЕ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ.....	65
4.1. Постановка задачи сверхзвуковой струи в спутном высокоскоростном поток с дополнительными усилениями.....	66
4.2. Анализ численных результатов влияния вариации дополнительного детерминистического возмущения на характеристики слоя смешения.....	69
4.3. Выводы.....	85
5 СИСТЕМА НЕДОРАСШИРЕННЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СТРУЙ В СПУТНОМ ПОТОКЕ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСИЛЕНИЯМИ.....	87
5.1. Постановка задачи.....	89
5.2. Анализ результатов.....	90

5.2.1. Влияние основных параметров струи и потока на закономерности смещения.....	91
5.2.2. Численный анализ поведения струи в зависимости от параметров детерминистического возмущения.....	114
5.3 Выводы.....	115
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	116
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	119

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

J	- скорость переноса турбулентной энергии,
ε	- диссипация турбулентной энергии,
ν	- кинематическая вязкость,
$\vec{\lambda}_{l_k}$	- волновое число,
$E(\vec{\lambda}_{l_k})$	- Турбулентный энергетический спектр,
\vec{E}, \vec{F}	- векторы потока,
\vec{E}_v, \vec{F}_v	- диффузионные члены вектора потока,
x, y, z	- продольная и поперечные координаты,
u, v, w	- продольная и поперечные компоненты скорости,
ρ	- плотность,
p	- давление,
E_t	- полная энергия,
τ_{ij}	- тензор касательных (вязких) напряжений,
τ_{tij}	- тензор напряжения турбулентного трения,
q_k	- поток тепла,
$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$	- показатель адиабаты,
c_p, c_v	- теплоемкость при постоянном давлении, объеме,
M_0 и M_∞	- число Маха струи и спутного потока,
M_c	- конвективное число Маха,
H_x, H_y, H_z	- длина и высота рассматриваемой области,
T	- температура,
A, B	- матрицы Якоби,
μ	- коэффициент динамической вязкости,
μ_t	- коэффициент турбулентной вязкости,
c	- скорость звука,
Δx	- шаг по продольной координате,
Δz	- шаг по поперечной координате,
$\Delta \xi$	- шаг по продольной координате в обобщенной системе,
$\Delta \eta$	- шаг по поперечной координате в обобщенной системе,
Ω	- завихренность,
n	- степень нерасчетности,
Re	- число Рейнольдса,
Pr	- число Прандтля,
St	- число Струхала,
u_τ	- динамическая скорость,
δ	- толщина турбулентного пограничного слоя,

δ_θ	- толщина потери импульса, начальная толщина завихренности,
δ_ω	- толщина завихренности,
d	- диаметр струи,
R^0	- универсальная газовая постоянная,
ω_i	- частота возмущений,
$Gaussian(z)$	- функция Гаусса,
D	- скорость диссипации турбулентной кинетической энергии,
E_ε	- дополнительный член,
c_{pk}	- удельная теплоемкость k -ой компоненты при постоянном давлении,
Λ	- матрица собственных значений,
R, R^{-1}	- матрицы правых и левых собственных векторов,
$\vec{w}=R^{-1}\vec{v}$	- инварианты Римана.

Нижние индексы:

0	- струя,
∞	- спутный поток или окружающая среда,
i, j, k	- номера узлов по координатам x, y, z соответственно,

Верхние индексы:

RANS	- Reynolds averaged Navier-Stokes (усредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса),
DNS	- Direct numerical simulation (прямое численное моделирование),
LES	- Large eddy simulation (моделирование крупных вихрей),
SGS	- Subgrid scale (подсеточный масштаб),
ПВРД	- прямоточный воздушно-реактивный двигатель,
ВРД	- воздушно-реактивный двигатель,
ГПВРД	- гиперзвуковой ПВРД,
ENO	- Essentially Nonoscillatory Scheme (существенно не осциллирующая схема),
WENO	- Weighted ENO (существенно не осциллирующая схема с весами)

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Одной из важнейших задач в авиации является проектирование сверхзвуковых и гиперзвуковых летательных аппаратов с прямоточно-воздушными реактивными двигателями (ПВРД), где в качестве окислителя используется воздух. Центральной задачей таких двигателей является достижение полноты сгорания топлива, обеспечивающее необходимую тягу двигателя. Это достигается благодаря увеличению скорости смешения топливно-воздушной смеси.

Существуют разнообразные подходы улучшения смешения топлива с окислителем, как, например, уступы и каверны перед вдуваемой струей, уступы на верхних стенках камеры сгорания, которые помогают на входе получить развитый слой смешения между топливной струей и набегающим потоком воздуха. Также при моделировании такого течения применяются сопла различной формы. Однако упомянутые выше подходы увеличивают стоимость ПВРД, поскольку добавление новых деталей усложняет их геометрию.

Препятствием для улучшения смешения является физическая сложность исследуемых течений, поскольку, помимо трехмерности моделируемой турбулентности, рассматриваемые течения включают в себя систему взаимодействия ударных волн, а также широкий диапазон возникающих вихревых структур.

Дополнительной проблемой при формулировке численной модели с использованием LES моделирования (моделирование крупных вихрей) для рассматриваемых течений является также постановка граничных условий, способных генерировать анизотропную, неоднородную, трехмерную турбулентность, близкую к реальной.

В настоящее время одним из перспективных подходов улучшения смешения является использование дополнительного детерминистического возмущения, налагаемого на вдуваемую струю (вдув возмущенной струи). Этот подход осуществляется путем амплитудно-частотного варьирования дополнительного воздействия на впрыскиваемую струю, тем самым обеспечивая контролируемый вдув топлива в камеру сгорания. Он хорошо исследован в дозвуковых струйных течениях, тогда как в сверхзвуковых и гиперзвуковых течениях проблема остается малоизученной.

Таким образом, вышеизложенное позволяет считать исследования, проводимые в данной работе, **актуальными** задачами в аэродинамике, в особенности при моделировании и прогнозировании трехмерных струйных сверх- и гиперзвуковых турбулентных течений в камерах сгорания, с целью улучшения смешения струи и потока.

Целью настоящей работы является: численное моделирование и изучение механизмов улучшения смешения вдуваемой сверхзвуковой неизобарической струи со сверхзвуковым спутным потоком с использованием детерминистического возмущения на основе осредненных по пространству трехмерных уравнений Навье-Стокса для совершенного газа.

Для достижения поставленной цели сформулированы следующие **задачи исследования:**

– разработать численную модель и выполнить численное моделирование вдува изобарической сверхзвуковой сжимаемой струи в спутный поток с дополнительными усилениями на струе с целью улучшения смешения.

– осуществить численное моделирование вдува системы неизобарических (недорасширенных) сжимаемых сверхзвуковых возмущенных струй в спутный поток с целью выявления влияния основных параметров струи и потока на закономерности смешения, а также анализа воздействия дополнительного детерминистического возмущения на рост и формирование слоя смешения.

Объектом исследования является пространственное сверхзвуковое турбулентное течение со вдувом сверхзвуковых газовых струй.

Предметом исследования является численное моделирование турбулентного смешения газовой струи, вдуваемой в сверхзвуковой спутный воздушный поток с использованием LES модели турбулентности.

Научная новизна заключается в следующем:

– сформулирована численная модель пространственного сверхзвукового турбулентного течения струи совершенного газа, вдуваемой в высокоскоростной спутный поток, которая описывается трехмерными осредненными по пространству уравнениями Навье-Стокса, замкнутыми моделью Смагоринского, изложен алгоритм численного решения системы уравнений на основе ENO-схемы третьего порядка точности;

– предложены и адаптированы для сверхзвукового течения входные граничные условия, основанные на спектральном генераторе флуктуаций скорости, способные воспроизвести реальное турбулентное течение;

– осуществлен новый способ интенсификации смешения струи со спутным потоком путем введения дополнительного детерминистического возмущения на входе, вместе с этим определен диапазон частот и амплитуд детерминистически возмущенной струи, приводящих к улучшению смешения при расчетном режиме;

– при численном моделировании системы недорасширенных сверхзвуковых струй в сверхзвуковом спутном потоке установлены закономерности влияния степени нерасчетности и чисел Маха на механизм формирования ударно-волновой структуры и ее влияние на зону смешения;

– получены параметры детерминистического возмущения, приводящие к улучшению смешения системы струй со спутным потоком при нерасчетном режиме течения.

Научные положения, выносимые на защиту:

– численная модель трехмерного сверхзвукового турбулентного течения струи совершенного газа в спутном сверхзвуковом потоке;

– новый способ интенсификации смешения струи с потоком методом введения детерминистического возмущения на входе, апробированный путем анализа результатов численного моделирования

проблемы вдува сверхзвуковой сжимаемой струи в спутный поток при расчетном режиме;

– результаты детального анализа системы неизобарических сверхзвуковых газовых струй с дополнительными усилениями, вдуваемых в спутный сверхзвуковой поток, исследование влияния возникающей ударно-волновой структуры на рост зоны смешения и формирование когерентных структур при помощи вариации параметра нерасчетности, чисел Маха струй и потока, а также частотной и амплитудной вариации детерминистического возмущения.

Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертационной работы определяется использованием фундаментальных законов сохранения массы, количества движения, энергии, вещества при построении математических моделей; удовлетворительным согласованием численных результатов с экспериментальными данными и теоретическими работами других авторов.

Теоретическая и практическая значимость результатов.

Разработанные в данной работе численная модель и метод решения осредненных по пространству уравнений Навье-Стокса могут быть использованы для расчетов трехмерных сверхзвуковых турбулентных струйных течений, позволяющих прогнозировать поведение реальных трехмерных процессов, возникающих при смешении топлива и окислителя в камерах сгорания ПВРД.

Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами. Данная работа выполнена в рамках следующих проектов:

- программы грантового финансирования фундаментальных исследований в области естественных наук «Численное моделирование пространственных турбулентных сжимаемых течений со вдувом струй и твердых частиц» (2018-2020 гг., №ГР 0118РК00461);

- программы грантового финансирования исследований по проекту «Жас галым» АР22686488 «Численное моделирование детерминистически возмущенной системы неизобарических сверхзвуковых струй в спутном потоке» 2024-2026 гг.

Личный вклад автора заключается в том, что все результаты, приведенные в данной работе, получены самим автором или при его непосредственном участии. Автор участвовал в постановке динамической модели задачи, а также самостоятельно произвел численные расчеты всех поставленных задач, включая верификацию поставленной математической и физической модели, провел тщательный и всесторонний анализ полученных результатов и пришел к их теоретическому обоснованию при участии научного консультанта.

Апробация работы.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих международных научных конференциях: «Международная научная конференция студентов и молодых ученых ФАРАБИ ӘЛЕМІ» (Алматы, Казахстан, 10-12 апреля 2018 г.); «Традиционная международная

апрельская математическая конференция, в честь Дня работников науки Республики Казахстан» (Алматы, Казахстан, 3-5 апреля 2019 г.); «V Международная научно-практическая конференция» (Чехия, Карловы Вары - Россия, Москва, 29-30 апреля 2020 г.), а также на научных семинарах: Института технической термодинамики Технологического университета Карлсруэ (2020 г., Карлсруэ, Германия); Механико-математического факультета КазНУ им. аль-Фараби (2018-2019 гг., Алматы); Института механики и машиностроения (2020 г., Алматы).

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 8 работ, в том числе 3 публикации в научных изданиях, входящих в перечень рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК для публикации основных результатов научной деятельности; 2 публикации в рейтинговых научных изданиях, индексируемых Scopus и Thompson Reuters (импакт-фактор не менее $IF=0.40$); 3 публикации в материалах международных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти разделов, заключения и списка использованных источников. Работа изложена на 127 страницах, содержит 36 рисунков, 8 таблиц.

Во введении отражены следующие моменты: актуальность, основные цели работы, новизна, научно-практическое значение диссертационной работы, степень ее разработанности.

Первая глава содержит в себе анализ исследований различных авторов по теме диссертационной работы. В ней содержится краткий обзор работ, посвященных исследованию методов моделирования турбулентности, анализ исследований (как экспериментальных, так и численных) вдува турбулентной струи в спутный поток с целью улучшения смешения при помощи наложения дополнительного детерминистического возмущения, также представлен обзор работ по численному моделированию вдува неизобарических сверхзвуковых струй, где также применяется введение дополнительных усилений для улучшения смешения.

Во второй главе осуществляется формулировка математической модели для поставленной проблемы. Исходной принята система осредненных трехмерных уравнений Навье-Стокса, замкнутых классической моделью Смагоринского. Производится процедура осреднения по плотности на примере уравнений неразрывности и Навье-Стокса в направлении x . Основная система приводится в безразмерной форме, где в качестве характерных значений принимаются параметры сверхзвукового потока, а за наименьший масштаб длины взята начальная толщина потери импульса (начальная толщина слоя смешения). Также приводится алгоритм решения исходных уравнений с применением ENO-схемы высокого порядка.

В третьей главе формулируется численная модель на примере проблемы истечения сверхзвукового слоя смешения. Предлагаются граничные условия на входе по аналогии с известными работами, адаптированные для сверхзвуковых течений, генерирующие анизотропность турбулентности. Производится верификация поставленной численной модели путем сравнения

полученных результатов с известными данными Samimmy et all. В результате численного эксперимента получены графики для осредненных турбулентных пульсационных характеристик, которые сравниваются с данными эксперимента для пяти вычислительных сеток, вследствие чего выявляется удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными, вместе с тем подбирается оптимальное количество узлов для вычислительной сетки. Также получены графики для трехмерного энергетического турбулентного спектра, демонстрирующие диапазон разрешаемых турбулентных вихрей для выбранной вычислительной сетки и при заданных размерах расчетной области.

В четвертой главе производится численное моделирование для проблемы вдува сверхзвуковой сжимаемой струи совершенного газа в сверхзвуковой спутный поток с добавлением дополнительного детерминистического возмущения. На входе формулируются граничные условия для введения дополнительных усилений на струе, с целью изучения их влияния на формирование и рост слоя смешения. Вследствие проведенного численного моделирования получены графики различных физических параметров, для проблемы вдува струи с дополнительным возмущением в сравнении с задачей истечения струи без дополнительных усилений. Также производится анализ амплитудно-частотного варьирования детерминистического возмущения, вследствие чего, в качестве результата, приводятся рекомендации по выбору наилучших амплитуд и частот, приводящих к более интенсивному смешению струи со спутным потоком.

В пятой главе осуществляется ряд численных экспериментов для проблемы вдува системы неизобарических сверхзвуковых струй с дополнительными усилениями в сверхзвуковой спутный поток, в результате которых получены графики, демонстрирующие влияние возникающих ударно-волновых структур на зоны смешения струй со спутным потоком, посредством вариации параметра нерасчетности. Проблема истечения системы недорасширенных струй в спутный поток также исследуется при вариации чисел Маха струй и потока и амплитуд детерминистического возмущения, вследствие чего приводятся выводы по выбору наиболее оптимальных условий (параметров), приводящих к улучшению смешения.

В заключении приводятся основные результаты и выводы, полученные в диссертационной работе.

1 СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА.

1.1 Методы моделирования турбулентности.

В данной главе представлен обзор работ, исследующих различные способы задания турбулентности при численном моделировании.

При исследовании турбулентных течений со слоем смешения можно обнаружить, что турбулентные структуры (вихри) разнятся от крупных, размером с ширину рассматриваемого канала до мельчайших структур, что, в свою очередь, приводит к выводу о том, что при расчетах нужно учитывать все возникающие размеры вихрей, а именно: необходимо задавать разные масштабы, как для крупных, так и для мелких турбулентных когерентных структур. Крупные масштабы содержат в себе кинетическую энергию турбулентности, которая под действием инерционных сил переносится в масштабы меньшего размера и так до тех пор, пока в самых мелких масштабах она не рассеивается под влиянием вязких сил. Такова суть понятия каскада энергии турбулентности [1]. В работе [2] автор вводит, в качестве дополнения, гипотезу о локальной изотропности, которая допускает статистическую изотропность в малых масштабах турбулентного потока при достаточно больших числах Рейнольдса.

Турбулентный поток приходит в движение благодаря двум основным силам: перенос турбулентной кинетической энергии от больших вихрей к малым и вязкая диссипация энергии в наименьших вихрях. Турбулентный перенос энергии характеризуется параметром скорости переноса T , зная который можно определить турбулентную диссипацию энергии ε , а вязкая диссипация в наименьших вихрях очевидно характеризуется кинематической вязкостью ν . Схематически все масштабы турбулентности, разделенные по размерам и в зависимости от типа сил, воздействующих на вихри, можно представить следующим образом [3]:

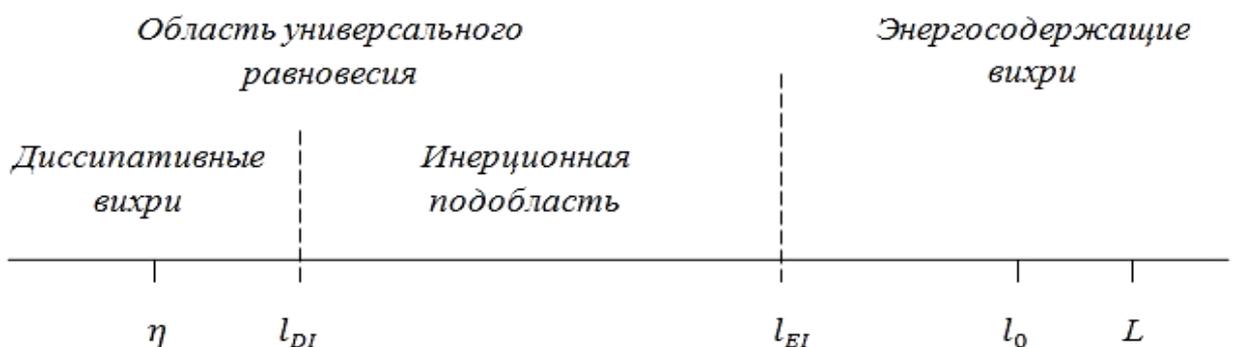


Рис. 1.1.1. Размеры вихрей при высоких числах Рейнольдса (масштабы турбулентности)

Рассмотрим поток, который является полностью развитым турбулентным потоком с характеристической скоростью U и шириной канала L . Число Рейнольдса $Re = UL/\nu$ взято существенно большим. Вихри размера l имеют характеристическую скорость $u(l)$ и характеристический масштаб времени $\tau(l) = l/u(l)$. Крупнейшие вихри задаются длиной l_0 , сопоставимой с

шириной канала L , а их характеристическая скорость $u_0 = u(l_0)$ имеет порядок среднеквадратичного значения турбулентной интенсивности $u' = (\frac{2}{3}k)^{1/2}$ и сопоставима с характеристической скоростью U . Число Рейнольдса для таких вихрей имеет следующий вид: $Re = u_0 l_0 / \nu$.

Как говорилось ранее, [1] вводится понятие каскада энергии от крупных вихрей к малым. Автор объясняет это тем, что крупные вихри являются нестабильными, вследствие чего они дробятся на вихри меньшего размера, таким образом, передавая свою энергию от большего вихря к структурам меньшего размера. В свою очередь образованные вихри малого размера продолжают процесс деления и переноса энергии. Такой процесс повторяется до тех пор, пока число Рейнольдса не станет настолько малым, что движение вихрей стабилизируется и на них начинает воздействовать уже молекулярная вязкость, под действием которой рассеивается оставшаяся кинетическая энергия. То есть, вязкая диссипация занимает конечное положение в турбулентном потоке. Скорость турбулентной диссипации ε , которая определяется процессом переноса энергии от крупных вихрей к малым, имеет порядок скорости u_0^2 и масштаб времени $\tau_0 = l_0 / u_0$. Тогда скорость переноса энергии от крупных вихрей к малым можно представить в виде: $u_0^2 / \tau_0 = u_0^3 / l_0$. Это подтверждается в экспериментах с течением со свободным слоем смешения, где также обнаружено, что $\varepsilon \sim u_0^3 / l_0$ и, что оно является независимым от ν при достаточно больших числах Рейнольдса.

ввел Понятие локальной изотропности вводится в [2] в области малых масштабов. На Рис.1.1.1 точка l_{EI} (где $l_{EI} \approx \frac{1}{6} l_0$ [3]) является границей между анизотропными крупными вихрями и изотропными малыми вихрями. Область, где $l < l_{EI}$, называется областью универсального равновесия, поскольку в этой области турбулентность не зависит от внешних условий, а любое изменение эффективных масштабов длины и времени может быть результатом влияния только параметров ε и ν [4]. Зная эти параметры, можно задать характерные, колмогоровские масштабы длины, скорости и времени, которые будут являться масштабами самых мелких вихрей, находящихся под влиянием вязких сил:

$$\eta = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4} \quad (1.1.1)$$

$$u_\eta = (\varepsilon \nu)^{1/4} \quad (1.1.2)$$

$$\tau_\eta = (\nu / \varepsilon)^{1/2} \quad (1.1.3)$$

Эти масштабы соответствуют числу Рейнольдса, равному единице:

$$Re = \frac{u_\eta * \eta}{\nu} = 1 \quad (1.1.4)$$

На Рис. 1.1.1 также представлена точка l_{DI} (где $l_{DI} = 60\eta$, [3]). Эта точка делит область универсального равновесия на две подобласти: инерционную подобласть и область диссипативных вихрей. В инерционной области пренебрегается воздействие вязких сил, так, что только в области диссипативных вихрей вязкая диссипация имеет влияние.

Область энергосодержащих вихрей имеет примерные границы $l_{EI} = \frac{1}{6}l_0 < l < 6l_0$ [3].

Таким образом, масштабы длины, скорости и времени могут быть определены, если заданы размеры вихрей l (в инерционной подобласти) и характеристические масштабы скорости и времени, определяемые с помощью ε и l :

$$u(l) = (\varepsilon l)^{1/3} = u_\eta (l/\eta)^{1/3} \sim u_0 (l/l_0)^{1/3} \quad (1.1.5)$$

$$\tau(l) = (l^2/\varepsilon)^{1/3} = \tau_\eta (l/\eta)^{2/3} \sim \tau_0 (l/l_0)^{2/3} \quad (1.1.6)$$

Отношения малых масштабов к большим можно получить из определения колмогоровских масштабов и из соотношения $\varepsilon \sim u_0^3/l_0$. Тогда получается [3]:

$$\eta/l_0 \sim Re^{-3/4} \quad (1.1.7)$$

$$u_\eta/u_0 \sim Re^{-1/4} \quad (1.1.8)$$

$$\tau_\eta/\tau_0 \sim Re^{-1/2} \quad (1.1.9)$$

Рассмотрим процесс распределения турбулентной кинетической энергии по вихрям различных размеров в простейшем случае однородной турбулентности. Для этого задается так называемая функция энергетического спектра $E(k)$.

Зная размеры турбулентных вихрей l можно задать величину, обратную этим размерам, которая называется волновым числом: $k = 2\pi/l$. Волновое число в диапазоне (k_a, k_b) будет равно [3]:

$$k_{(k_a, k_b)} = \int_{k_a}^{k_b} E(k) dk \quad (1.1.10)$$

скорость турбулентной диссипации ε в диапазоне чисел (k_a, k_b) будет равна [3]:

$$\varepsilon_{(k_a, k_b)} = \int_{k_a}^{k_b} 2\nu k^2 E(k) dk \quad (1.1.11)$$

Из первой гипотезы Колмогорова о подобии следует то, что в диапазоне равновесия $k > k_{EI} \equiv 2\pi/l_{EI}$, спектр является функцией от ε и ν . Из второй гипотезы следует то, что в инерционном диапазоне $k_{EI} < k < k_{DI} \equiv 2\pi/l_{DI}$ спектр энергии имеет следующий вид [3, 5]:

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (1.1.12)$$

где C является константой.

Энергетический спектр при $k^{-5/3}$ был назван спектром Колмогорова. Ниже представлен рисунок распределения энергии по разным волновым числам [4]:

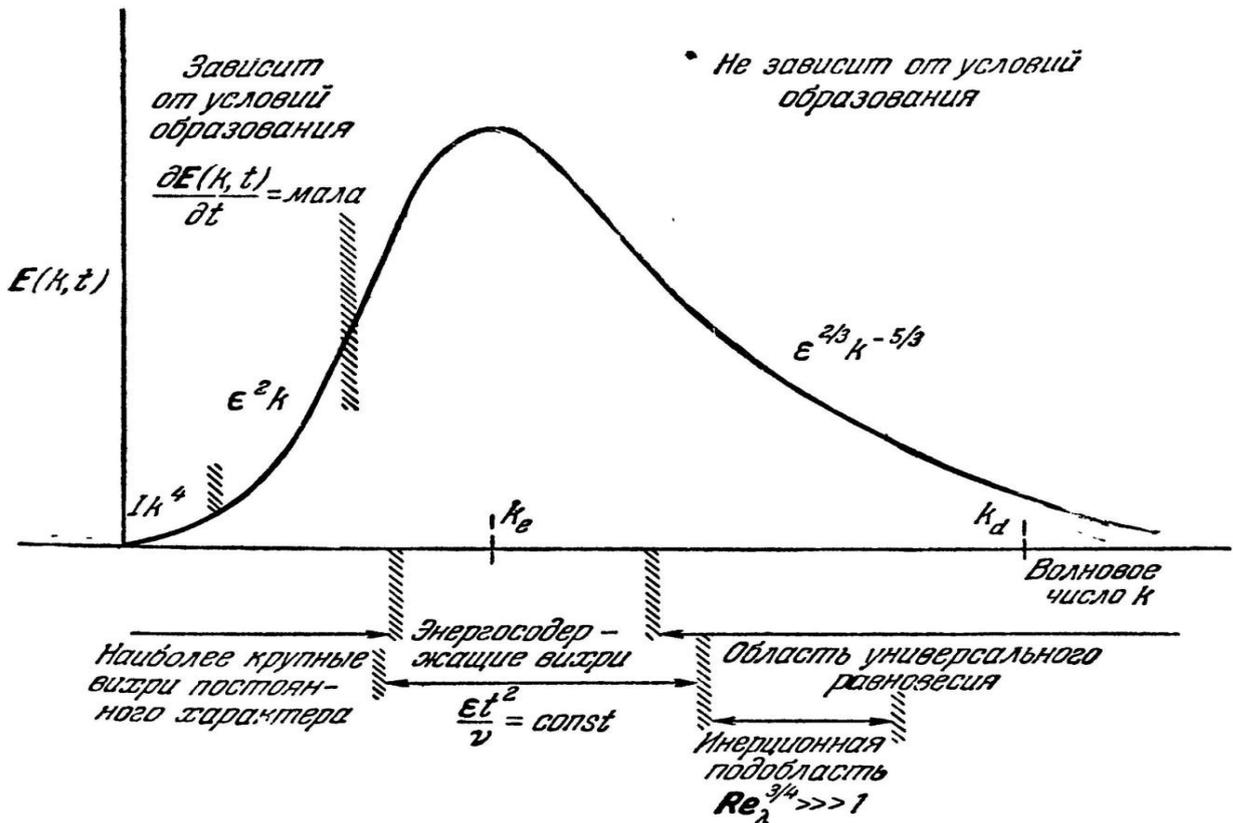


Рис. 1.1.2. Форма распределения $E(k, t)$ в различных областях волновых чисел.

Если соотнести спектр из Рис.1.1.2 к Рис. 1.1.1, можно увидеть, что большим волновым числам соответствуют малые вихри и наоборот, малым волновым числам соответствуют крупные энергосодержащие вихри. Таким образом, имея график энергетического спектра можно свести задачу исследования размерностей когерентных структур к тому, чтобы задать минимальное и максимальное волновые числа k_e, k_{max} , демонстрирующие

диапазон разрешаемых когерентных структур, содержащих большее количество кинетической энергии.

Рассмотрим далее обзор различных методов расчета турбулентных течений.

В настоящее время интенсивно развиваются различные методы расчета турбулентных течений. Помимо известного RANS метода, основанного на решении осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье-Стокса, особое внимание уделяется таким моделям, как, например, модели DNS (прямое численное моделирование), LES (моделирование крупных вихрей), а также их модификации RANS-LES. Основной задачей таких методов является задание реалистичных входных характеристик турбулентности на входе. Например, для построения нестационарного поля в методе RANS-LES необходимо по имеющимся осредненным характеристикам течения (RANS-область) построить поле гидродинамических величин (LES-область). Дополнительной трудностью такого метода является задание корректных граничных условий на входе.

Методы прямого численного моделирования (DNS) решают полные нестационарные трехмерные уравнения Навье-Стокса без предварительного осреднения, разрешая таким образом все масштабы турбулентности. Благодаря этому в методах DNS можно рассчитать средние величины потока посредством осреднения по достаточно длинному интервалу времени. Эти методы относятся к наиболее строгим подходам при моделировании турбулентных течений. В рамках DNS-методов представлено множество работ, так, например, в работах [6-7] интегрируется уравнение устойчивости Рэйлея в рамках теории линеризированной невязкой устойчивости для возмущений, усиливающихся по времени, гиперболически-тангенциального профиля скорости.

Как известно, двумерное течение невязкой жидкости, направленное вдоль одной координаты, является стабильным относительно малых волновых возмущений до тех пор, пока в профиле скорости не появляется точка перегиба. Механизм неустойчивости такого профиля скорости является невязким, а любое присутствие вязкости только подавляет возникающее возмущение. И наоборот, если же рассматривать течения без точки перегиба в профиле скорости, как например, течение вокруг плоской пластины с пограничным слоем, то неустойчивость таких течений можно обнаружить с введением в рассмотрение вязкости. Простейшим примером течений с точкой перегиба в профиле скорости является течение двух потоков с разной постоянной скоростью, разделенных между собой поверхностью разрыва.

В работе [6] представлены результаты численного расчета собственных значений и собственных функций уравнения устойчивости Рэйлея для возмущенного гиперболически-тангенциального профиля скорости в течении с пограничным слоем. Используется дифференциальное уравнение с малыми возмущениями для невязкого течения со скоростью $U(y)$ в направлении x . Малые возмущения $u_1(x, y, t)$ и $v_1(x, y, t)$ накладываются на основное течение

при условиях, что $u_1 \ll U$ и $v_1 \ll U$. Функция потока $\psi_1(x, y, t)$ для возмущающего движения определяется так:

$$u_1 = \partial\psi_1/\partial y, \quad v_1 = -\partial\psi_1/\partial x \quad (1.1.13)$$

Для волнового возмущения функция потока выглядит следующим образом:

$$\psi_1(x, y, t) = \mathcal{R}[\phi(y)e^{i\alpha(x-ct)}] \quad (1.1.14)$$

где $\phi(y)$ - амплитуда, а α - волновое число возмущения. Число $c = c_r + ic_i$ комплексное, c_r - фазовая скорость, а c_i - значение роста возмущения. Добавление (13) и (14) в уравнение движения Эйлера без учета величин второго порядка приводит к уравнению следующего вида:

$$[U - c][\phi'' - \alpha^2\phi] - U''\phi = 0 \quad (1.1.15)$$

(15) – уравнение устойчивости Рэйля. Далее в работе [7] рассматривается следующий профиль скорости:

$$U(y) = 0.5[1 + \tanh y] \quad (1.1.16)$$

Для такого профиля скорости фазовая скорость c_r независима от волнового числа и равна:

$$c_r = U(0) = 0.5$$

c_i в нейтральном случае равняется нулю.

Далее уравнение (16) переписывается в виде:

$$\phi'' - [\alpha^2 - 2(1 - \tanh^2 y)]\phi = 0 \quad (1.1.17)$$

и решение уравнения (17) представляется в виде:

$$\phi_1 = \alpha \cosh \alpha y - \sinh \alpha y \tanh y \quad (1.1.18)$$

$$\phi_2 = \alpha \sinh \alpha y - \cosh \alpha y \tanh y \quad (1.1.19)$$

Единственным собственным значением которого является $\alpha = 1$. Тогда собственная функция приобретает вид:

$$\phi = \phi_1 = \operatorname{sech} y$$

Для анализа устойчивости такой задачи нужно совместно с волновыми числами α вычислять также значения c_i и αc_i при этом, учитывая какому числу α соответствуют αc_i . Волновое число α , которое может привести к неустойчивости, является максимальным по значению. В работе [7] таким числом является $\alpha = 0,4446$. В работе [8] используется такая же методика, как и в [7], а максимальное волновое число равно $\alpha = 0,392$.

На основе такого анализа представлено немало работ авторов. Они анализируют поведение таких течений и их динамику в рамках методов прямого численного моделирования DNS. Рассмотрим обзор некоторых из них.

В работе [9] рассматривается развивающееся по пространству двумерное течение со свободным слоем смешения и выявляется, что в двумерных течениях со свободным слоем смешения внешние возмущения, накладываемые на течение, приводят к высокому начальному увеличению слоя смешения, содержащего нужной перенос энергии в поле задаваемых флуктуаций. Однако далее появляется область уменьшения роста слоя смешения, в которой перенос энергии совершается от поля флуктуаций обратно к полю средних скоростей. Далее уже ниже по потоку рост слоя смешения начинает больше напоминать естественный, и не оказывается под влиянием возмущающих сил, наложенных на течение.

В работе [10] моделируются течение недорасширенной сверхзвуковой струи и плоское течение со слоем смешения. Результаты показывают, что оба течения находятся под влиянием сжимаемости, уменьшающей скорости смешения турбулентности и подавляющей завихренность при высоких числах Маха. Для того чтобы улучшить смешение, в работе предлагается ввести внутреннее возмущение путем исключения ячеек расчетной сетки, в которых содержатся скачки уплотнения. Авторы [11] изучают невязкое, двух- и трехмерное течение плоской струи в параллельном потоке с заданным диапазоном значений сжимаемости, от низких до высоких. Данная работа представляется в качестве расширенного обследования моделирования крупномасштабных структур завихренности, с целью более детального анализа эффектов сжимаемости.

В [12] рассматривается разрывной метод Галеркина для численного моделирования течений со слоем смешения, развивающихся как по пространству, так и по времени. Для пространственно-развивающихся течений рассчитываются когерентные структуры крупного масштаба. Для течений, развивающихся по времени, случайное поле скоростей и временная эволюция момента толщины слоя смешения хорошо согласуются с экспериментами.

Большим недостатком методов прямого численного моделирования DNS является то, что для их использования требуются затраты больших вычислительных ресурсов. Это сокращает возможности их применения до расчетов течений с довольно тривиальной геометрией и малыми числами Рейнольдса, учитывая то, что в случае DNS моделирования шаг

интегрирования по времени должен иметь порядок колмогоровских масштабов.

В настоящее время для расчета трехмерных турбулентных течений со сложной структурой хорошо себя зарекомендовали методы моделирования крупных вихрей (LES), которые основываются на гипотезе о статистической независимости крупных и мелких вихрей. В таких методах мелкомасштабные структуры исключаются из уравнений Навье-Стокса с использованием пространственной фильтрации. Мелкомасштабные вихри моделируются при помощи подсеточных моделей (SGS). Так LES-методы разрешают крупные вихри, размер которых превышает некоторую заданную величину (эта величина характеризуется шириной фильтра). Эти методы требуют меньших вычислительных ресурсов, по сравнению с методами DNS, также в них шаги сетки и временные интервалы могут быть намного больше колмогоровских. Тем не менее при расчетах методом LES течений с пограничным слоем часто наблюдается уменьшение вихрей вблизи стенки настолько, что размеры энергосодержащих и диссипативных вихрей перекрываются и шаги сетки по времени начинают падать до величин, характерных для DNS моделей.

В связи с этим, в последнее время особое внимание уделяется гибридным методам RANS и LES. В таких методах область или области LES могут быть «встроены» в область RANS. Основной проблемой таких методов является задание реалистичных характеристик турбулентности на входных границах. Для разрешения этой проблемы требуется методика построения нестационарного поля гидродинамических величин по имеющимся из RANS осредненным величинам. На данный момент таких методик существует довольно много, здесь остановимся на основных из них.

Методы построения нестационарного поля величин можно разделить на две большие группы:

- методы рециклинга (метод предварительного моделирования);
- методы генерации синтетической турбулентности.

Наиболее точная методика определения турбулентных флуктуаций при расчетах LES или DNS используется в методах рециклинга. Суть этого метода состоит в проведении дополнительного (предварительного) расчета, предназначенного для того, чтобы обеспечить основной расчет точными входными условиями. Если турбулентность в основном расчете принять полностью развитой на входе (как, например, в трубах, воздуховодах и каналах), то для предварительного расчета могут быть использованы периодические начальные условия в направлении осредненного течения. Течение на выходной плоскости переиспользуется и перезадается на входе так, что расчет генерирует уже свои, новые начальные данные. Моделирование методом рециклинга можно осуществить двумя подходами.

Первый подход: в окрестности входной границы рассматриваемого основного течения, которое является уже полностью развитым, вводится область дополнительного расчета некоторой длины так, что входная граница течения становится входной областью. В ней задаются периодические данные, при помощи которых в дополнительном расчете генерируются уже свои

входные условия. Основной задачей в таком подходе является задание длины дополнительной области, она не должна быть слишком маленькой, поскольку в таком случае спектральные характеристики полученного поля в области низких частот не будут соответствовать характеристикам реальной турбулентности. Такой подход можно использовать также при расчетах развивающегося турбулентного течения с пограничным слоем. В таком случае используется перемасштабирование поля скорости, которое задается из плоскости, стоящей на некотором расстоянии от входной границы (где пограничный слой уже достаточно развит). Стоит отметить, что операция перемасштабирования вносит некоторые погрешности в поля компонент скоростей во входном сечении.

Второй подход: область рассматриваемого основного течения расширяется вниз по потоку до части области, в которой флуктуации скорости являются уже статистически установившимися. Затем поля скоростей из этой области переносятся на входную границу на некотором расстоянии от нее. Однако, для того чтобы получить такую область со статистически установившимся уровнем флуктуаций скорости, нужно производить расчет в основной области в течение всего интервала времени.

Вообще говоря, в методах рециклинга течение инициализируется профилем средних скоростей вместе с несколькими неустойчивыми гармониками Фурье [13, 14]. Упомянутые ранее в первом подходе периодические начальные условия могут быть использованы для задания начальных условий только для течений, являющихся однородными в направлении потока, что ограничивает их применение до простых полностью развитых течений. Такой метод моделирования турбулентности представлен в работах [15, 16]. В работе [15] методом рециклинга получены входные данные для LES области в случае течения в плоском асимметричном диффузоре. Широкий диапазон пространственных и временных масштабов, присутствие нежелательных градиентов давления, а также появление нестабильных зон разделения в тыльной части диффузора приводят к сложностям при расчетах. В работе [16] генерируются начальные входные условия для LES области в течениях со слоем смешения. Также методы рециклинга используются в работе [17] для течения в канале с переменным поперечным сечением, где получены входные данные для LES-области загиба в 180 градусов. Еще один пример использования таких методов представлен в работе [18], где моделируется двух периодическое течение в коаксиальной трубе. Входные данные в [18] получены для внутренней LES-секции коаксиального сопла сгорания.

Методы, в которых не используется предварительный расчет, синтезируют начальные условия путем использования различных операций, в которых используются генераторы случайных чисел для построения случайного сигнала скорости, схожего с турбулентностью. Такие методы называются методами генерации синтетической турбулентности. Они базируются на основополагающем предположении о том, что турбулентный поток может быть аппроксимирован воспроизведением набора статистических данных, имеющих низкий порядок, как, например, средняя

скорость, турбулентная кинетическая энергия, касательные напряжения, двухпараметрические пространственные и временные корреляции. Однако синтезированная турбулентность является аппроксимацией настоящей турбулентности, а статистические данные более высокого порядка (как, например, скорость вязкой диссипации, турбулентный перенос энергии или параметры давления-напряжения) как правило, не воспроизведены. Синтезированная турбулентность также может иметь структуру, ощутимо отличную от реальной турбулентности.

На данный момент разработано большое количество методов генерации синтетической турбулентности. Такие методы можно разделить на две группы: методы, работающие в физическом пространстве (алгебраические) и методы, работающие в пространстве Фурье (спектральные).

В алгебраических методах используется набор случайных чисел, который должен удовлетворять заданным статистическим данным турбулентности. Самый прямой метод генерирования синтетических флуктуаций – это задать набор независимых случайных чисел r_i , взятых из нормального распределения $N(0, 1)$ с нулевым средним $M = 0$ и единичной дисперсией $\sigma = 1$. Затем перемасштабировать его так, что полученные флуктуации будут иметь подходящую кинетическую энергию k . После чего профили средних скоростей U дополняются этим набором чисел. Таким образом, скорость потока задается в виде:

$$u_i = U_i + r_i \sqrt{\frac{2}{3} k} \quad (1.1.20)$$

где r_i - независимые случайные переменные каждой компоненты скорости в каждой точке и на каждом временном шаге. Такая операция (20) генерирует случайный сигнал скорости, который воспроизводит необходимые среднюю скорость и профили кинетической энергии. Однако все перекрестные корреляции между компонентами скорости и двухточечными корреляциями по пространству и времени равны нулю.

Модификация в корреляции компонентов скорости к этому методу представлена в работе [19]. В случае если известен тензор напряжений Рейнольдса, используется разложение Холецкого a_{ij} тензора напряжений R_{ij} для построения сигнала, соответствующего необходимому тензору напряжений Рейнольдса:

$$u_i = U_i + r_j a_{ij} \quad (1.1.21)$$

где

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \sqrt{R_{11}} & 0 & 0 \\ \frac{R_{21}}{a_{11}} & \sqrt{R_{22} - a_{21}^2} & 0 \\ \frac{R_{31}}{a_{11}} & \frac{R_{32} - a_{21}a_{31}}{a_{32}} & \sqrt{R_{33} - a_{31}^2 - a_{32}^2} \end{pmatrix} \quad (1.1.22)$$

Такая операция позволяет заданной случайной процедуре получить нужные перекрестные корреляции R_{ij} между компонентами скорости i и j при условии, что случайные данные удовлетворяют необходимым условиям $\langle r_i r_j \rangle = \delta_{ij}$ и $\langle r_i \rangle = 0$. Это тот случай, когда r_i являются независимыми случайными числами, взятыми из нормального распределения $N(0, 1)$.

Метод, описанный выше, тем не менее, не дает корреляций ни по пространству, ни по времени. Некоррелированные случайные флуктуации имеют энергию, распределенную одинаково по всем волновым числам и, как следствие, имеют избыток энергии в мелкомасштабных структурах, что приводит к их быстрой диссипации. Так, например, в [19] показано, что входные условия для развивающегося в пространстве пограничного слоя, сгенерированные методом, описанным выше, приводят к ламинаризации течения до той точки расчета, где имеет место переход и начинает развиваться турбулентность. В работе [20] отмечается, что использование рассматриваемого метода приводит к результатам, напоминающим наложенный ламинарный профиль в форсунке турбулентного сопла. В работе [21] алгебраический метод используется для генерирования течения в форсунке круглой турбулентной струи, результат показывает, что вводимые случайные флуктуации рассеиваются практически моментально, что, в свою очередь приводит к тому, что турбулентная струя характеризуется почти ламинарным профилем, что подтверждает выводы, полученные в работе [20].

Спектральные методы используют разложение сигнала на гармоники Фурье. Разложение Фурье для генерации синтетического поля течения используется авторами [22], где область течения иницируется трехмерным однородным изотропным полем синтетической скорости. Поскольку сигнал однородный во всех трех направлениях по пространству, его можно разложить в пространстве Фурье:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (1.1.23)$$

где \mathbf{k} – трехмерное волновое число. Каждый коэффициент Фурье $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}$ задает определенную амплитуду, которая рассчитывается из заданного изотропного трехмерного энергетического спектра $E(|\mathbf{k}|)$ и случайной фазы $\theta_{\mathbf{k}}$, взятой из единого распределения на интервале $[0, 2\pi]$. Синтезированное поле скоростей тогда:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{E(|\mathbf{k}|)} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \theta_{\mathbf{k}})} \quad (1.1.24)$$

Этот метод широко используется для инициирования полей скорости в работе [23] при исследовании временного распада однородной изотропной турбулентности.

Адаптация данного метода в моделировании пространственно-развивающихся турбулентных течений представлена автором [24]. Алгоритм построения следующий: допускается, что для течения, развивающегося в направлении x , сигнал, заданный на входе, является однородным в обратных направлениях y и z и стационарным по времени, что позволяет такой сигнал разложить по гармоникам Фурье, с коэффициентами Фурье, вычисленными из энергетического спектра, заданного в значениях частоты и двух обратных волновых чисел:

$$\hat{\mathbf{u}}(k_y, k_z, \omega, t) = \sqrt{E(k_y, k_z, \omega)} \exp(i\phi(k_y, k_z, \omega, t)) \quad (1.1.25)$$

где ϕ – фазы, зависящие от времени для того, чтобы избежать периодического сигнала. Они сдвинуты на один шаг в заданном интервале времени T_r (он, как правило, пропорционален интегральному шагу по времени течения) в случайный момент времени и из случайного числа $\Delta\phi_r$ (где $|\Delta\phi_r|$ ограничен значением $2\pi/20$). Поскольку фазы имеют случайную фазовую зависимость, вычисленный сигнал не является непрерывным и его спектр отличается от заданного энергетического спектра. Чем меньше фазы зависят от времени, тем лучше аппроксимация необходимого сигнала, но тем более периодичен сгенерированный сигнал. Трехмерный энергетический спектр $E(|\mathbf{k}|)$ задается со значением $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$, а волновое число k_x представлено в виде частоты ω : $k_x = \omega/U_0$ (U_0 – средняя скорость конвекции). Сигнал скорости в физическом пространстве вычисляется по аналогии с работой [22] посредством представления трехмерного обратного преобразования Фурье в направлениях y , z и t . Такую операцию можно эффективно представить с использованием так называемого быстрого разложения Фурье, как это делается в работе [25].

В работе [26] флуктуации скорости генерируются спектральным методом, как в [24], а затем основные уравнения перемасштабируются так, что построенные флуктуации соответствуют заданному тензору напряжений Рейнольдса. Эта операция используется для генерирования входных условий турбулентного пограничного слоя.

Фазовая информация в разложении Фурье связана со структурой и динамикой турбулентности, следовательно, метод, использованный в работе [26], в которой фазы являются случайными, вполне вероятно может иметь недостачу структурной информации, которая может быть ответственна за довольно длинный переходный участок, необходимый для восстановления

турбулентной статистики. Для того чтобы уменьшить длину этого участка, в работе [27] через входную площадь области симуляции (в симуляции была использована гипотеза Тейлора) проводится замороженная область DNS. Угол фазы коэффициентов Фурье остается без изменений, в то время как амплитудный фактор рандомизируется. Авторами в работе [27] смогли восстановить нужные уровни частотного коэффициента C_f только спустя три толщины пограничного слоя. Другим путем рандомизации коэффициентов Фурье, заранее полученных из предварительных данных, является задание им случайного фазового сдвига. Такой метод исследуется в работе [28], где генерируются входные условия для плоского течения в канале. Авторами обнаружено уменьшение частотного коэффициента вниз по потоку на 30%, упадок турбулентной интенсивности в пристеночной области. Схожие методы фазовой или амплитудной рандомизации исследуются и в работе [29] в рамках входных условий для LES и приводят к схожему результату. Если рассмотреть по отдельности, то фазовая рандомизация генерирует сигнал с точной турбулентной статистикой, однако потоковые турбулентные структуры представляются плохо, что является причиной уменьшения частотного коэффициента вниз по течению. И наоборот, амплитудная рандомизация восстанавливает правильную структуру потока, а турбулентность не подвергается существенному переходу вниз по потоку.

Более продвинутые модели потоков с разложением Фурье, восстанавливающие фазовые корреляции, рассматриваются в работах [30, 31]. Эти модели, однако, имеют свои ограничения при генерировании изотропной турбулентности. Их целью является улучшение понимания процессов переноса инертной субдиапазонной энергии, но не генерация входных условий для практических приложений LES.

Рассмотренные ранее методы относятся к генерированию синтетической турбулентности в однородном изотропном поле возмущений. При расчетах, построенное таким образом поле возмущений скорости приводит к тому, что энергия вихреобразования распределяется по всем волновым числам (т.е. вихрям), одинаково. Как в крупномасштабных, так и в мелкомасштабных вихрях содержится одинаковое количество энергии, что приводит к переизбытку ее в малых вихрях и очень быстрой ее диссипации. Это ведет к отсутствию процесса каскада энергии от больших вихрей к малым и, как следствие, турбулентность затухает очень быстро, что затрудняет процесс расчета и моделирования. Таким образом, для того чтобы избежать негативных последствий, необходимо ввести в рассматриваемые проблемы условия анизотропности и неоднородности.

Рассмотрим далее краткий обзор работ различных авторов, предлагающих методы введения неизотропности при моделировании синтетической турбулентности.

В работе [32] изучаются течения в несимметричном диффузоре вокруг трехмерной возвышенности и в нижней части каверны. Синтетические изотропные флуктуации представляются в виде:

$$u'_i(x_j) = 2 \sum_{n=1}^N \hat{u}^n \cos(k_j^n x_j + \psi^n) \sigma_i^n \quad (1.1.26)$$

где $\hat{u}^n, \psi^n, \sigma_i^n$ – амплитуда, фаза и направление моды Фурье, соответственно. Максимальное волновое число определяется на основе сеточного разрешения $k_{max} = 2\pi/(2\Delta)$, а минимальное из $k_1 = k_e/p$, где k_e соответствует энергосодержащим вихрям, p должно быть больше единицы для того, чтобы самый крупный масштаб оказался больше того, что соответствует волновому числу k_e . В работе используется модифицированный спектр фон Кармана. В качестве амплитуды берется скорость трения u_τ из известного заранее профиля средних скоростей, а интегральный пространственный масштаб составляет 10% от начального заданного пограничного слоя. Каждая реализация флуктуаций скорости соответствует начальным флуктуациям на одном временном шаге. Турбулентный пространственный масштаб флуктуаций на входе соответствует заданному интегральному пространственному масштабу. Однако, поскольку все реализации являются независимыми, корреляции по времени заданных входных турбулентных флуктуаций в результате оказались равными нулю, что является нефизичным. Для того, чтобы представить корреляции по времени, в работе [32] вводится так ассиметричный фильтр по времени, содержащий турбулентный временной масштаб, взятый как: $0.1\delta_{in}/u_\tau$.

В работе [33] рассматриваются четыре вида течений: развитое турбулентное течение в плоском канале, течение в турбулентном пограничном слое на плоской пластине, течение в плоском свободном сдвиговом слое, а также обтекание выпуклости на плоской поверхности. Искомое поле синтетической турбулентности $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$ представляется в виде: $u'_i(\mathbf{r}, t) = a_{ij}(\mathbf{r})v'_j(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{v}'(\mathbf{r}, t)$ – вспомогательное поле пульсаций, удовлетворяющее условиям $\langle v'_i \rangle = 0$, $\langle v'_i v'_j \rangle = \delta_{ij}$ и задача генерации поля $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$, таким образом, сводится к генерации поля $\mathbf{v}'(\mathbf{r}, t)$, представленного в виде:

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}, t) = 2\sqrt{3/2} \sum_{n=1}^N \sqrt{q^n} \left[\sigma^n \cos\left(k^n \mathbf{d}^n \cdot \mathbf{r} + \varphi^n + s^n \frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (1.1.27)$$

где нормированные амплитуды мод из (1.1.27), равные

$$q^n = \frac{E(k^n)\Delta k^n}{\sum_{n=1}^N E(k^n)\Delta k^n}, \quad \sum_{n=1}^N q^n = 1 \quad (1.1.28)$$

вычисляются с использованием модифицированного безразмерного энергетического спектра фон Кармана:

$$E(k) = \frac{(k/k_e)^4}{[1 + 2.4(k/k_e)^2]^{17/6}} f_\eta f_{cut} \quad (1.1.29)$$

Введенные в (1.1.29) эмпирические функции $f_\eta = \exp[-(12k/k_\eta)^2]$, $f_{cut} = \exp\left(-\left[\frac{4\max(k-0.9k_{cut}, 0)}{k_{cut}}\right]^3\right)$ предназначаются для того, чтобы учитывать изменение формы спектра при приближении к колмогоровскому волновому числу $k_\eta = 2\pi/l_\eta = 2\pi/(v^3/\varepsilon)^{1/4}$ и для обеспечения его быстрого падения в окрестности максимально разрешаемого на используемой сетке волнового числа:

$$k_{cut} = \frac{2\pi}{l_{cut}}$$

где l_{cut} (минимальная разрешаемая на сетке длина волны) определяется эмпирическим выражением

$$l_{cut} = 2\min\{[\max(h_y, h_z, 0.3h_{max}) + 0.1d_w], h_{max}\}$$

где h_y, h_z - локальные шаги сетки во входном сечении LES, $h_{max} = \max(h_x, h_y, h_z)$, а d_w - расстояние от рассматриваемой точки до стенки.

Входящее в (1.1.29) волновое число k_e , при котором достигается максимум энергетического спектра, соответствует длине волны наиболее энергонесущих мод синтезированного поля флуктуаций или, по-другому, размеру наиболее энергонесущих вихрей синтетической турбулентности l_e . В работе [33] эта величина задается следующим образом:

$$l_e = \min(2d_w, C_l l_t) \quad (1.1.30)$$

где $C_l = 3$ - эмпирическая константа, а l_t - линейный масштаб модели турбулентности, который используется в RANS области течения.

Для того, чтобы полностью сформулировать алгоритм генерации турбулентности, в работе [33] авторам необходимо определить также временной масштаб τ , входящий в (1.1.27). Он рассчитывается по величине l_e^{max} и характерному значению скорости во входном сечении U :

$$\tau = \frac{C_\tau l_e^{max}}{U},$$

где $C_\tau = 2$ - эмпирическая константа.

Таким образом, в работе [33] показывается, что сочетание локального определения масштаба энергонесущих вихрей l_e и выбор масштаба времени позволяют генерировать близкие к реальным турбулентные структуры.

В работе [34] рассматривается три вида течений: течение с пограничным слоем, течение с плоским сдвигом, а также течение кильватерной струи. Авторами разрабатывается метод построения течения со случайными величинами, который можно применять также и в случае неізотропного, неоднородного поля скоростей турбулентного течения. Рассмотрим пошаговый алгоритм, предлагаемый в [34].

1. Задается анизотропный тензор корреляции скоростей

$$r_{ij} = \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \quad (1.1.31)$$

турбулентного течения $\{\tilde{u}_i(x_j, t)\}_{i,j=1\dots 3}$, для которого необходимо найти тензор ортогонального преобразования a_{ij} , который диагонализуют тензор r_{ij}

$$a_{mi} a_{nj} r_{ij} = \delta_{mn} c_n^2 \quad (1.1.32)$$

$$a_{ik} a_{kj} = \delta_{ij} \quad (1.1.33)$$

a_{ij} и c_n - известные функции. Коэффициенты $c_n = \{c_1, c_2, c_3\}$ - турбулентные скорости флуктуации (u', v', w') в новой, преобразованной посредством тензора a_{ij} , системе координат.

2. Задается течение в трехмерной области $\{v_i(x_j, t)\}_{i,j=1\dots 3}$

$$v_i(\vec{x}, t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N [p_i^n \cos(\tilde{k}_j^n \tilde{x}_j + \omega_n \tilde{t}) + q_i^n \sin(\tilde{k}_j^n \tilde{x}_j + \omega_n \tilde{t})] \quad (1.1.34)$$

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j}{l}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad c = \frac{l}{\tau}, \quad \tilde{k}_j^n = k_j^n \frac{c}{c_{(j)}} \quad (1.1.35)$$

$$p_i^n = \varepsilon_{ijm} \zeta_j^n k_m^n, \quad q_i^n = \varepsilon_{ijm} \xi_j^n k_m^n \quad (1.1.36)$$

$$\zeta_j^n, \xi_j^n, \omega_n \in N(0, 1), \quad k_i^n \in N(0, 1/2) \quad (1.1.37)$$

где l, τ – масштабы длины и времени турбулентности, соответственно, ε_{ijk} – тензор перемещения, использованный в операции умножения вектора, и $N(M, \sigma)$ – нормальное распределение со средним значением M и стандартной девиацией σ . Числа k_j^n, ω_n взяты в качестве волнового числа и частоты, соответственно, модулируемого турбулентного спектра:

$$E(k) = 16 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} k^4 \exp(-2k^2) \quad (1.1.38)$$

3. На поле течений v_i применяются операции масштабирования и преобразования, рассмотренные в двух предыдущих шагах, для получения нового поля u_i

$$w_i = c_{(i)} v_{(i)} \quad (1.1.39)$$

$$u_i = a_{ik} w_k \quad (1.1.40)$$

где (1.1.39) – операция масштабирования, (1.1.40) – операция ортогонального преобразования. Полученное таким образом новое поле течений также удовлетворяет анизотропии изначального поля течений $\vec{u}(\vec{x}, t)$.

В работе [35] рассматривается два вида течений: турбулентное течение в канале и обтекание плоской пластины с пограничным слоем. Поле скоростей v_i задается следующим образом:

$$v_i(x_j, t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N [p_i^n \cos(\hat{d}_j^n \hat{x}_j^n + \omega_n \hat{t}) + q_i^n \sin(\hat{d}_j^n \hat{x}_j^n + \omega_n \hat{t})] \quad (1.1.41)$$

где

$$\hat{x}_j = \frac{2\pi x_j}{L_b}, \quad \hat{t} = \frac{2\pi t}{\tau_b} \quad (1.1.42)$$

В (1.1.42) $\tau_b = k/\epsilon$ и $L_b = \tau_b V_b$ – временные и пространственные масштабы турбулентности, а $V_b = k^{1/2}$ – масштаб скорости. Случайные частоты $\omega^n = N(1, 1)$ взяты из нормального распределения $N(\mu, \sigma^2)$ с единичным средним $\mu = 1$ и единичной вариацией $\sigma^2 = 1$. Амплитуды представлены в виде:

$$p_i^n = \epsilon_{ijk} \zeta_j^n d_k^n, \quad q_i^n = \epsilon_{ijk} \xi_j^n d_k^n \quad (1.1.43)$$

где $\zeta_j^n, \xi_j^n = N(0, 1)$ и

$$\hat{d}_j^n = d_j^n \frac{V}{c^n}$$

являются модифицированными волновыми числами, полученными путем умножения волновых чисел d_j^n на отношение масштаба скорости $V_b = L_b/\tau_b$ к c^n , которое задается следующим образом:

$$c^n = \sqrt{\frac{3}{2} \langle u'_l u'_m \rangle \frac{d_l^n d_m^n}{d_k^n d_k^n}} \quad (1.1.44)$$

Вышеперечисленные вычисления приводят к тому, что изотропное распределение волновых чисел d_j^n становится неизотропным. После этого синтетическое поле турбулентных флуктуаций преобразуется:

$$u'_i = a_{ik} v_k$$

где a_{ik} – преобразование Холецкого.

Такие же, как и в работе [36], данная методология рассматривается и в работе [37] при построении методов моделирования синтетической турбулентности. Авторы улучшили модель синтетической турбулентности для стохастического, зависящего от времени и неоднородного турбулентного течения. Алгоритм построения такой модели имеет следующий вид:

$u_i = a_{ik} v_k$ – случайный вектор скорости, где a_{ik} – разложение Холецкого. Поле синтетических скоростей представляется в виде:

$$v_i(x_j, t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N \left[p_i^n \cos \left(2\pi \left[\frac{\hat{d}_j^n x_j}{L} + \omega^n t / \tau \right] \right) + q_i^n \sin \left(2\pi \left[\frac{\hat{d}_j^n x_j}{L} + \omega^n t / \tau \right] \right) \right]$$

где $\hat{d}_j^n = d_j^n \frac{V}{c^n}$, $V = L/\tau$

$$c^n = \sqrt{3 \overline{u'_l u'_m} \frac{d_l^n d_m^n}{2 d_k^n d_k^n}}, \quad p_i^n = \epsilon_{ijk} \zeta_j^n d_m^n, \quad q_i^n = \epsilon_{ijk} \xi_j^n d_m^n$$

$$\zeta_j^n, \xi_j^n = N(0, 1), \quad \omega^n = N(1, 1), \quad d_i^n = N(0, 1/2)$$

Построенная таким образом модель названа автором как синтетическая улучшенная модель для неоднородной турбулентности и является моделью синтетической турбулентности с анизотропным и неоднородным полем скоростей.

1.2. Турбулентное истечение газовых струй.

В данном подразделе представлен литературный обзор работ по экспериментальному и численному исследованию струйных течений при различных режимах истечения. Отдельно изучены исследования для дозвуковых, околосвуковых и сверхзвуковых режимов истечения струи в зависимости от начальных значений физических и гидродинамических параметров.

Точный прогноз турбулентных течений занимает центральное положение в сложности изучения таких разнообразных задач, как оценка глобального изменения, улучшение энергетической эффективности двигателей, контроль рассеяния загрязняющих веществ, проектирование биомедицинских приборов и многих других проблемах. Эта проблема является фундаментальной в понимании всех физических процессов геофизики, горения и смешения.

Турбулентные струйные течения представляют интерес при рассмотрении многих задач аэродинамики как, например, турбулентное смешение струи топлива с набегающим воздухом в камерах сгорания воздушно-реактивных двигателей (ВРД) и прямоточно-воздушно-реактивных двигателей (ПВРД), так же, как и при предсказании уровня шума двигательных установок, взаимодействии струй на старте ракетно-космической техники со стартовым оборудованием. С основами теории и фундаментальными постулатами струйных течений жидкостей и газов можно ознакомиться подробно в трудах авторов учебников [37-39].

Классификация струйных течений производится по наиболее существенным признакам, характеризующим течение в струе. Практическое значение имеют струи, вытекающие из сопла или отверстия в стенке сосуда. В зависимости от формы поперечного сечения отверстия (сопла) различают круглые, квадратные, плоские и другие виды струй, а в зависимости от направления скорости течения на срезе сопла – осевые, веерные и закрученные. В соответствии с характеристиками вещества струи бывают жидкие, газовые и плазменные. Скорость течения характеризуется числом Маха (отношение скорости истечения струи к скорости звука на срезе сопла). В зависимости от его значения различают дозвуковые ($M < 1$), околосвуковые ($M = 1$) и сверхзвуковые ($M > 1$) струи. Такой же классификацией подразделяется и скорость среды, в которую вытекает струя. Струи также могут вдуваться параллельно (спутный поток) или под углом к потоку. Если поток, в который вдувается струя, является неподвижным, то такую струю называют затопленной. Если поток подвижный и дозвуковой, а струя – сверхзвуковая, то такая струя будет называться недорасширенной, а в обратном случае – перерасширенной. При численном моделировании струйных течений различают два режима истечения струи: расчетный и

нерасчетный. Такие режимы подразумевают под собой наличие перепада давления при истечении струи в поток. При расчетном режиме истечения турбулентной струи (без перепада давления) в картине течения появляются турбулентные структуры (вихри), а при нерасчетном режиме (наличие перепада давления) помимо турбулентных структур в картине течения также присутствуют скачки уплотнения.

Экспериментальные исследования в области турбулентных струйных течений берут свое начало в конце 40-ых годов. В данной работе рассматриваются некоторые из этих работ. Так, например, в [40] дозвуковая свободная холодная турбулентная струя воздуха, вдуваемая в атмосферных условиях, изучается при помощи однолучевого оптического метода Шлирена, при числах Маха струи (M_0) равных 0.3, 0.6, 0.9. Температура торможения струи равна температуре окружающей среды. Авторами получены значения для флуктуаций градиента плотности в соотношении приблизительно 100:1. В результате выявилось, что на низких частотах поперечные флуктуации плотности в потоке превалируют по силе над осевыми флуктуациями, что связано с возникновением крупномасштабных когерентных структур в струе. При этом данные, замеряемые вдоль оси струи указывают на более отчетливое характеристическое число Струхаля, которое в свою очередь относится к плотностной структуре вдоль оси струи.

В [41] поле потока, создаваемое двумя коаксиальными струями, исследуется экспериментально с помощью термоанемометров. Авторы изучают развитие поля потока и его приближение к состоянию автомодельности при вариации площадей между внешним и внутренним соплом, также, как и варьировании скоростями, исходящими из каждого из сопел. Результаты представлены для распределения средних скоростей, турбулентных и касательных напряжений при вариации чисел Рейнольдса, основанных на диаметрах сопел (0 до 10^5), скорости оказались достаточно низкими, чтобы поток можно было считать несжимаемым. Стремление потока к автомодельности изучается измерением осевых турбулентных интенсивностей и выявляется то, что поток становится автомодельным достаточно далеко вниз по течению. Также авторами приводится зависимость ядра внутренней струи от отношения скорости внешней струи к внутренней U_o/U_i : ядро струи значительно уменьшается с увеличением U_o , при этом изменение в ядре внешней струи не зависит от U_o/U_i .

В работе [42] изучается осесимметричная турбулентная газовая струя, вдуваемая в движущийся поток газа с постоянной скоростью равной 30.5 м/с для двух значений отношения скорости струи к скорости спутного потока (91.3 м/с, 137 м/с). Измерения проводятся при помощи анемометра с горячим проводом DISA длиной в 1 мм диаметром в 5 мм в рабочей секции длиной в 183 см. Основная цель исследования - при помощи полученных турбулентных характеристик и масштабов длины диссипации получить представление о том, как структура потока отклоняется от структуры осесимметричной струи.

Авторами [43] представляются корреляции коэффициентов смешения для коаксиальных, затопленных и струй в спутном потоке при широком диапазоне скоростей струи ($U_0 = 69, U_0 = 129, U_0 = 527, U_0 = 762, U_0 = 1006$) и потока ($U_\infty = 0, U_\infty = 14, U_\infty = 59, U_\infty = 159, U_\infty = 234$), вместе с тем рассматриваются режимы истечений воздух/воздух гелий/воздух, водород/воздух. Отдельные корреляции даются для турбулентных коэффициентов смешения для свободных струй без вторичного потока и для струй с параллельным вторичным потоком. Средние процентные различия в коэффициенте смешения, выведенном из измерений, и предсказанном корреляциями, составляют 11.7% и 15.2% для профилей скорости и температуры/концентрации, соответственно.

В [44] проводится экспериментальное исследование развития истечения дозвуковой осесимметричной струи, сжатый воздух которой маркирован диоктилфталатом (DOP) в установленной внутри испытательной секции дозвуковой аэродинамической трубы с низким уровнем турбулентности. Скорость спутного потока принята постоянной 3.20 м/с, отношение скорости выходной плоскости струи к скорости трубы (спутного потока) составляет 5:1, $Re=22600$ и выходной диаметр сопла 2.14 см. Поле потока осесимметричной струи исследуется в сечениях, варьирующихся от приблизительно нуля до восьми диаметров ниже по течению от отверстия. Основной задачей было получение односточечных статистических моментов потока, включая среднюю скорость, интенсивность турбулентности и прерывистость. Автокорреляции и кривые спектральной плотности мощности определяются ниже по течению для флуктуирующего поля скорости на различных расстояниях от осевой линии струи для различных сечений. Авторы же [45] проводят измерения средних и флуктуирующих компонентов скорости в необогреваемой осесимметричной струе, установленной в низкоскоростной аэродинамической трубе. Измерения делаются с помощью лазерного велосиметра с обратным рассеянием для чисел Маха на выходе струи от 0.47 до 1.67 и отношении скорости в туннеле к скорости на выходе струи от 0.1 до 0.5. Скорость роста кольцевой области смешения соответствует скорости двумерного слоя смешения. Было обнаружено, что потенциальная длина ядра струи почти обратно пропорциональна разнице скоростей свободного потока. Пиковые интенсивности осевой турбулентности изменяются как 7/10 степени разницы скоростей. Также выявляется, что средняя скорость, интенсивность турбулентности и асимметрия осевой скорости согласуются с измерениями для струй в неподвижном воздухе с использованием соответствующей локальной радиальной координаты, основанной на толщине завихренности.

Эволюция скоростей и концентраций в ближнем поле для осесимметричной струи, вдуваемой в спутный поток, представлена в [46], при отношении плотности газа струи к спутному потоку равному 3.8 и отношениях средней объемной осевой скорости в спутном потоке к скорости струи варьирующимися от 0.26 до 2. Число Рейнольдса принимается постоянным и равняется около 16000 (2.43 м/с). Результаты, основанные на измерениях разрешенной по времени скорости (двух компонентов) и концентраций,

полученные с использованием лазерной анемометрии и систем Рэлеевского рассеяния, показывают, что перенос импульса и массы в ближнем поле зависит от крупномасштабной структуры, которая образуется в слое смещения струи.

В работе [47] исследуется турбулентный поток, возникающий в следствие истечения цилиндрической струи в свободное пространство. Число Рейнольдса, основанное на выходных параметрах, составляет приблизительно 105. Измерения турбулентного поля скорости осесимметричной струи с использованием импульсного лазерного доплеровского анемометра (LDA) и стационарных и методов с горячей летящей проволокой (SHW и FHW соответственно) регистрируются для всех моментов вплоть до третьего порядка. Результаты LDA и FHW существенно отличаются от результатов SHW, особенно вдали от центра струи, где локальная интенсивность турбулентности минимальна. Наблюдаемые различия согласовываются с хорошо известными ошибками при использовании горячей проволоки в высокоинтенсивных турбулентных потоках, в частности, поперечном течении. Особое внимание уделяется проверке того, были ли удовлетворены уравнения движения для свободной осесимметричной струи. Показано, что результаты LDA и FHW удовлетворяют как дифференциальной, так и интегральной формам уравнения импульса для свободной струи в пределах экспериментальной точности измерений и интегрирования.

В работе [48] описываются эксперименты, проведенные на семействе осесимметричных горизонтальных турбулентных струй, истекающих в спутный поток с различными отношениями скорости сопла к скорости спутного потока. Особое внимание уделяется обеспечению профилей скорости в форме шляпы на выходе сопла, чтобы уменьшить количество параметров, связанных с начальными условиями. Поведение потока сравнивается с автомодельными асимптотическими формами, а также исследуются условия для турбулентных напряжений с целью возможности получения автомодельности. Авторы работы [49] исследуют такую же задачу, как и в [42] при трех разных значениях скорости для спутного потока газа (6 м/с, 3.31 м/с, 8.39 м/с). Измерения проводятся при помощи трубок Пито и стационарных горячих проводов в рабочей секции размера $20 \times 20 \text{ см}^2$. А в [50] исследуется турбулентная круглая струя в спутном потоке при двух отношениях плотностей струи к потоку равных 4.2 и 1.2 в секции размером 0.53 на 0.53 на 5.38 (м). Измерения проводятся при помощи PIV и PLIF методов, и основной целью исследования является сравнение осевого и радиального механизмов смещения струи.

Все вышеприведенные экспериментальные исследования приведены для случая дозвукового и околосзвукового истечения струи в спутный поток. Далее представлены экспериментальные работы для сверхзвуковых горизонтальных струй в потоке.

Авторами работы [51] проводится исследование по изучению сверхзвуковой подогретой свободной струи с числом Маха $M=1.82$. Представляется сравнительный анализ результатов с работой [40] для холодной дозвуковой струи, в результате которого было выявлено, что

флуктуации градиентов плотности в случае с подогретой струей оказываются большими по значению в сравнении с параметрами для холодной струи, полученными в [40].

В работе [52] локализованные плазменные актуаторы дуговой нити используются для управления сверхзвуковой струей, выдуваемой из осесимметричного сопла с расчетным числом Маха 1.3, работающим от перерасширенного до недорасширенного режимов истечения с числом Маха полностью расширенной струи, взятым от 1.1 до 1.5. Число Рейнольдса, основанное на диаметре выходного отверстия сопла составляет от 1.0×10^6 до 1.4×10^6 . Используются лазерные визуализации плоского потока, шлирен-визуализация и измерения скорости частиц. Восемь актуаторов, распределенных азимутально примерно на 1 мм выше по потоку от выходного отверстия сопла, используются для создания различных азимутальных мод в большом диапазоне частот (число Струхала St от 0.07 до 2.70). Предварительные результаты в недорасширенных струях ($M_j=1.4$ и $M_j=1.5$) имеют сходство с результатами для идеально расширенной струей ($M_j=1.3$). Струя реагирует на налагаемое возмущение во всем диапазоне частот, но реакция является оптимальной (с точки зрения развития крупных когерентных структур и улучшения смешения) вокруг предпочтительного для струи числа Струхала 0,33 ($f = 5$ кГц). Струя также реагирует на воздействие различными азимутальными модами ($m = 0$ до 3 и $m=\pm 1, \pm 2, \pm 4$). Воздействие на струю азимутальной модой $m = \pm 1$ на частоте предпочтительной моды струи обеспечит максимальное улучшение смешения. Предварительные результаты показывают, что перерасширенные струи ($M_j=1.1$ и $M_j=1.2$) вообще не реагируют на дополнительное возмущение или реакция является относительно небольшой.

Влияние кольцевой струи спутного потока на первичную сверхзвуковую струю из сопла Маха 2 при разных уровнях перерасширения исследуется авторами [53] с использованием техники теневого снимка. Коэффициенты давления сопла (NPR) 3, 4, 5, 6, 7 используются для перерасширенного истечения первичной струи, а NPR=8 для почти идеально расширенного истечения. Распределения давления по центральной линии струи снимаются с использованием трубок Пито с целью исследования протяженности сверхзвукового ядра и активности смешения струи с потоком, также авторами представляются теневые снимки возникающих ударных волн. Обнаружено, что спутный поток действует как ингибитор смешения на всех уровнях перерасширения для сопла Маха 2.

В исследовании [54] изучается влияние дозвукового и звукового спутного потока на ядро звуковых и сверхзвуковых струй. Для изучения звуковых струй используется сходящееся круглое сопло. Для изучения сверхзвуковых струй используются круглые сопла с числами Маха 1.43 и 2. Для введения спутного потока указанные первичные сопла окружаются сходящимся соплом. Для струй из звукового сопла изученные уровни расширения струи составляют 1.58 и 2.10 (недорасширенная струя), для сопла с числом Маха 1.43 – 0.75, 0.90,

1.50 и 2.10 (расширенная струя), а для сопла Маха 2 – составляют 0.78 и 0.91 (перерасширенная струя). Основным интересом этого исследования является анализ влияния спутного потока на структуру первичной струи при перерасширенных и недорасширенных истечениях, так же, как и его влияние на сверхзвуковое ядро первичной струи в случае звуковых и Маха 1.43 сопел. Схожее экспериментальное исследование проводится авторами [55] при аналогичных условиях.

Авторы работы [56] исследуют сверхзвуковую $M=1.5$ турбулентную струю в неподвижном пространстве, при помощи PIV метода и статических проб Пито, измеряющих параметры потока в рабочей части площадью $350 \times 95 \text{ мм}^2$. Авторами представляется новый вид сверхзвукового сопла, который тестируется при трех режимах: перерасширенная, расширенная и недорасширенная струя. Изучаются также эффекты сжимаемости на поведение скорости распространения: при перерасширенном режиме выявлены самые большие скорости.

В работе [57] взаимодействие между дифрагирующей ударной волной и однородной струей с числом Маха 1.31 и 1.59 изучается с использованием трех геометрий дифрагирующего угла: прямой пандус, зубчатый пандус и закругленный разделитель. Результаты получены при помощи оптического метода Шлирена. Числа Рейнольдса, основанные на гидравлическом диаметре приводной секции ударной трубы, составляют 1.08×10^6 и 1.68×10^6 . В результате выявлено, что поле потока струи развивается быстрее и с более прочными структурами при больших числах Маха, а дифракция вокруг закругленного разделителя развивает периодическую вихревую структуру, которая не разрушается после устранения возмущения, вызванного прохождением ударной волны.

Влияние геометрии сопла на структуру сверхзвуковой свободной струи исследуется как экспериментально, так и численно в работе [58]. В экспериментах связь между высотой, диаметром диска Маха и степенью нерасчетности исследуется с использованием оптического метода Шлирена. Результаты показывают, что высота диска Маха изменяется в зависимости от геометрии сопла.

Далее представлен анализ работ авторов, занимающихся численным моделированием проблемы горизонтального вдува турбулентной струи как для дозвукового, переходного так и для сверхзвукового и гиперзвукового истечения.

В работе [59] исследуется развивающаяся в пространстве сжимаемая круглая свободная струя, вдуваемая в неподвижное пространство, при двух случаях числа Маха: $M=0.7$ (дозвуковая) и $M=1.4$ (сверхзвуковая) при помощи метода моделирования крупных вихрей (LES). В качестве входных граничных условий используется случайный генератор пертурбаций (белый шум). Для вычислений применяется конечно-разностная схема МакКормака четвертого порядка по пространству и второго порядка по времени. Расчетная сетка состоит из $100 \times 74 \times 74$ узлов. Основной целью работы является исследование влияния сжимаемости на течение. В первом случае ($M=0.7$) с конвективным

числом Маха, равным 0.35, течение слабо зависит от влияния сжимаемости. В окрестности численного сопла в струе наблюдается появление квазиосесимметричных вихрей с продольными вихрями-петлями между ними. Оно наблюдается до развития чередующегося парного взаимодействия (что в случае струи является эквивалентным винтовому образованию пар для задачи плоского слоя смещения), приводящего к необходимому расширению струи и развитию турбулентности. Такие квазиосесимметричные вихри исчезают во втором случае ($M=1.4$) и развитие чередующегося парного взаимодействия здесь возникает сразу после. Это связано с резким начальным сокращением скорости распространения струи, возникающем по причине неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, которая появляется из-за влияния сжимаемости, что приводит к увеличению длины потенциального ядра струи на 27% по сравнению с дозвуковым случаем. Далее вниз по потоку струя становится дозвуковой и расширяется аналогично первому случаю.

Целью авторов [60] является исследование влияния числа Рейнольдса ($1.7 \cdot 10^3 \leq Re \leq 4 \cdot 10^5$) на поток круглой изотермической струи, вдуваемой в неподвижную среду при числе Маха $M=0.9$ с использованием LES моделирования и схем низкой диссипации и дисперсной дискретизации (шестиступенчатая схема Рунге-Кутты второго порядка по времени) при разнообразном выборе фильтров. В качестве входных граничных условий выставлен случайный генератор пертурбаций, давление равняется давлению окружающей среды, а радиальная и азимутальная составляющая скоростей равны нулю. Расчетная сетка состоит из $255 \times 221 \times 221$ узлов. Как показывают результаты расчетов, развитие турбулентности значительно видоизменяется при разнообразных числах Рейнольдса. Так, например, при уменьшении числа Рейнольдса струя начинает развиваться гораздо быстрее после потенциального ядра с большими значениями турбулентных напряжений на больших интегральных масштабах.

В [61] исследуется влияние конвективного числа Маха ($M_c = \frac{M_1 - M_2}{2}$, где M_1 и M_2 обозначены как скорость струи и спутного потока, соответственно) на плоские дозвуковые струи в спутном потоке путем численного моделирования с использованием схем пространственной и временной интеграции высокого порядка. Число Рейнольдса взято равным 8000, M_c варьируется от 0.3 до 0.8 с шагом 0.1. Для устранения неоднородностей, вызванных сеткой, применяется явный трехдиагональный пространственный фильтр. Среднее поле потока и статистика турбулентности получены из результатов моделирования с использованием осреднения по времени. Выявлено, что крупные вихревые структуры играют доминирующую роль в макроскопической динамике смещения, а также то, что конвективное число Маха оказывает большое влияние на потенциальное ядро и распространение струи, а именно: что потенциальное ядро возрастает с увеличением M_c , тогда как скорость распространения струи наоборот уменьшается. Похожее исследование проведено авторами [62] посредством LES моделирования дозвуковых круглых струй со спутным потоком и без него, с использованием компактной

конечно-разностной схемы высокого порядка и приближенного метода деконволюции на основе явной фильтрации при числе Маха 0,9 и числе Рейнольдса 88 000. И выявлено, что при наличии спутного потока наблюдается увеличение потенциальной длины ядра и уменьшение скорости распространения струи. Авторы продолжают исследование в [63], где изучается влияние спутного потока на изменение интенсивности турбулентности и снижение шума в околоструйной области, и выявляется, что увеличение соотношения скоростей спутного потока к струе приводит к снижению интенсивности турбулентности и шума в околоструйной области.

Исследование в работе [64] фокусируется на влиянии наклона выходного отверстия сопла на характеристики смещения перерасширенных струй Маха 2,17 при параметрах нерасчетности NPR 5, NPR 6 и NPR 7 с использованием коммерческого программного пакета ANSYS Fluent. Исследуемые сходящиеся-расходящиеся сопла представляют собой круглое сопло с углом скоса 300 (Bevel30) и скошенное сопло углом скоса 450 (Bevel45). Сопла сконструированы с равным отношением площади горловины к выходному сечению, чтобы поддерживать равномерное число Маха на выходе сопла. Из результатов обнаружено, что скошенные сопла эффективно уменьшают ядро струи на 46%, что указывает на улучшенное смещение струи. Также отмечено, что при более низком параметре нерасчетности (NPR 5), сопло с углом скоса 300 оказывается лучше, чем сопло с углом скоса 450, а при промежуточной нерасчетности оба сопла уменьшают ядро струи с одинаковой скоростью. Однако при самом высоком NPR 7 сопло Bevel45 демонстрирует самое высокое улучшение смещения.

Целью работы [65] является исследование влияния чисел Маха и Рейнольдса на поведение турбулентных газовых струй с целью получения новых знаний о гидродинамическом процессе смещения и распространения турбулентных струй. Используется метод Flow-Large Eddy and Direct Simulation, FLEDS для уравнений Навье-Стокса, отфильтрованных по Фавру. Сжимаемость анализируется путем рассмотрения газовых струй с числом Маха, равным 0.8, 1.4, 2.0 и 2.6, и Re , равным 10000. Что касается влияния Re на газовые струи, исследуются четыре случая, а именно $Re = 2500, 5000, 10\ 000$ и $20\ 000$, с числом Маха, равным 1.4. Результаты показывают, что в соответствии с предыдущими экспериментальными и численными исследованиями, длина потенциального ядра растет с увеличением числа Маха. Что касается затухания скорости и скорости распространения вниз по течению от потенциального ядра, здесь эффекты сжимаемости не имеют влияния, за исключением струи с числом Маха 2.6. При увеличении числа Рейнольдса Re длина потенциального ядра уменьшается до одного для всех Re выше 10000. В области ниже по течению от потенциального ядра затухание скорости уменьшается с увеличением числа Re от 10000 до 20000, тогда как для более низких значений Re влияние оказывается пренебрежительно малым.

В работе [66] проводится численное моделирование для исследования влияния интенсивности и угла ударной волны на распад вихря при сверхзвуковом истечении струи с числами Маха 3.5 и 5.0.

Много исследований по турбулентным струйным течениям посвящено сфере аэроакустики, а именно уменьшению шума, возникающего в окрестности турбулентных струй [67-72]. Такие исследования актуальны в задачах понижения уровня шума в городских аэропортах, а именно при производстве реактивных двигателей. Основным источником высокого уровня шума от реактивных двигателей является шум, возникающий при турбулентном струйном перемешивании. Большинство работ, посвященных исследованию таких задач, основываются на статистическом описании турбулентности [73, 74]. Так например В работах [75-76] рассматривается случай круглой струи, и проводится прогнозирование характеристик смешения и результирующего акустического шума; случай дозвуковой и сверхзвуковой струи исследуется в работе [77] применительно к воздухоплавательным и космическим системам, а в работе [78] проводится прогнозирование шума в случае сжимаемой струи ($M=0.9$) без спутного потока при помощи прямого численного моделирования (DNS), а также при помощи моделирования крупных вихрей (LES).

В ряде следующих работ также проводится прогноз шума в турбулентных струях при различных условиях: в [79] рассматривается перерасширенная турбулентная струя ($M=2$); в [80] исследуется турбулентная круглая изотермическая струя ($M=0.9$) а в работе [81] шум, создаваемый холодной сверхзвуковой круговой двойной струей, моделируется от сверхзвуковой двойной струи с полностью расширенным числом Маха 1,358 и одиночной струи.

В работе [82] авторы предпринимают попытку уменьшения шума, излучаемого высокоскоростными турбулентными струями, в работе [83] проводится аэроакустическое исследование струйных потоков из конических сопел при высоких трансзвуковых числах Маха от 0.8 до 0.98, проектирование же для снижения шума производится в работах авторов [84-89].

1.3. Исследование вдува горизонтальной турбулентной струи в спутный поток с целью улучшения смешения.

В этой главе представлен обзор работ по дозвуковому и сверхзвуковому истечению турбулентной струи в поток с использованием дополнительного детерминистического возмущения с целью улучшения смешения.

В более ранних работах [90-93] показывается применимость дополнительного возмущения и его способность влиять на формирование и рост когерентных структур, возникающих в турбулентном течении.

Экспериментальное исследование влияния дополнительного возмущения на формирование турбулентности в струйных течениях представлено авторами многих работ. Так, в работе [94] экспериментально исследуются трехмерные когерентные структуры совместно с механизмом смешения круговой водяной струи при помощи техники визуализации течения. На входе накладываются аксиальные и азимутальные возмущения с целью стабилизации поведения поперечных и продольных вихрей. Выявлено, что наложение дополнительных усилений на отдельно взятые когерентные структуры положительно влияет на размытие границы между струей и

окружающей средой, а также на рост зоны смешения. Также авторами показано, что усиление только крупномасштабных поперечных вихрей, увеличивает размытие границы между струей и окружающей средой, однако не влияет на зону смешения. Также похожее экспериментальное исследование производится в работах [95-897] где различные турбулентные струи (дозвуковые, звуковые и неизобарические сверхзвуковые) с дополнительными усилениями вдуваются в поток с целью детального анализа влияния детерминистического возмущения на рост и формирование слоя смешения, а также на процесс образования и свертки когерентных структур.

Количество работ, посвященных численному моделированию контролируемого вдува струи с целью улучшения смешения при дозвуковом режиме истечения, также немало. Так, например, в работе [98] производится сравнение результатов для характеристик стационарных и импульсных контролируемых струй с числом Рейнольдса 10^6 , дозвуковым числом Маха 0.9. В результате достигнуто сокращение длины ядра первичной струи на 50%, что приводит к улучшению смешения.

В работе [99] исследуются свободные круглые струи для числа Рейнольдса 1000 посредством прямого численного моделирования (DNS). В этой работе рассматривается метод улучшения смешения, основанный на (осесимметричном) варикозном возмущении с частотами 0.1 и 0.2, налагаемым на струю. В результате для частоты 0.2 в слое смешения наблюдается процесс слияния образованных вихрей и при дальнейшем увеличении частоты возмущения выявляется образование крупных энергосодержащих вторичных вихрей в дальнем поле струи. Наибольшее влияние дополнительного усиления наблюдается для частот около предпочтительного значения самой неустойчивой моды 0.32.

В работе [100] проводится исследование влияния детерминистического возмущения на недорасширенную струю Маха 1.2 на основе LES моделирования с использованием двух чисел Струхала, основанных на диаметре выходного отверстия сопла, 0.3 и 0.9. Также моделируется струя без дополнительных усилений, результаты которой сравниваются с экспериментом, где было получено хорошее совпадение. Форсирование струи при $St = 0.3$ приводит к увеличению распространения слоя смешения, тогда как $St = 0.9$ приводит к еще большему увеличению скорости роста слоя смешения, что приводит в свою очередь к значительному азимутальному улучшению смешения.

В работе авторов [101] представлены результаты численного моделирования с использованием на основе $k-\epsilon$ модели турбулентности для одиночной круглой струи при высоком числе Рейнольдса и высоком дозвуковом числе Маха ($Re = 10^6$, $M=0.9$), возмущенной стационарными и импульсными контролируруемыми струями. В результате получено, что при наложении дополнительных усилений возникает сокращение длины потенциального ядра струи (относительно случая невозмущенной струи) на 40%. Симметричные и несимметричные режимы истечения создают различные вихревые структуры, которые приводят к различным уровням

улучшения смешения в двух азимутальных режимах и объясняют лучшую производительность антисимметричной пульсации.

В работе [102] производится прямое численное моделирование (DNS) несжимаемых, пространственно развивающихся квадратных и круглых струй в диапазоне чисел Рейнольдса 500–2000 и с применением дополнительного детерминистического возмущения. Трехмерные нестационарные уравнения Навье–Стокса решаются с использованием пространственной и временной дискретизации высокого порядка. Детерминистические возмущения, применяемые на входе потока, вызывают усиление неустойчивой моды и, как результат, более ранний переход к турбулентности. Расчеты для струи с дополнительными возмущениями проводятся с использованием варикозного возмущения с фиксированной амплитудой, в то время как частота варьируется. Получено, что при частотах возмущения в диапазоне 0.4–0.6 квадратные струи достигают лучшего смешения по сравнению с круглыми.

Авторы [103] численно моделируют контролируемый впрыск недорасширенной струи числа Маха 1.3 с целью улучшения смешения и исследования понижения шума при двух различных числах Струхала $St = 0.3$ и $St = 0.9$. Показано, что по сравнению со случаем истечения струи без дополнительного усиления возмущения с $St = 0.3$ приводит к увеличению скорости распространения слоя смешения, благодаря возникновению в нем крупных тороидальных вихрей. А результат при $St = 0.9$ приводит к более раннему возникновению турбулентности, но с формированием менее крупных когерентных структур. Тем не менее для случая с $St = 0.9$ выявляется доминирование осесимметричного режима даже на больших расстояниях вниз по потоку.

В исследовании [104] реакция сверхкритической круглой струи на различные режимы возмущения, включая варикозный, спиральный, хлопающий, двойной варикозный/спиральный и двойной варикозный/хлопающий, изучается с использованием LES моделирования. больших вихревых симуляций. Результаты показывают, что возмущения, в особенности гибридные, значительно увеличивают турбулентное смешение, а именно: варикозный/хлопающий тип возмущения оказывают наибольшее влияние на развитие струи и форму ее поперечного сечения по сравнению с другими типами усилений. Более того, варикозные/хлопающие возмущения оказывают наибольшее влияние на крупномасштабное турбулентное смешение.

Авторами [105] производится численное моделирование с целью тестирования предложенного метода контролируемого вдува струи, улучшающего смешение. В нем используется пара актуаторных механизмов на выходе из сопла, которые воздействуют на слой смешения вблизи углов сопла путем выдувания и уменьшения жидкости антисимметричным образом. В результате получены графики течения двухмерной струи жидкости с числом Рейнольдса, равным 100. Авторами выявлено существенное увеличение зоны смешения для случая струи с дополнительными возмущениями.

В работе [106] исследуется влияние изменения структуры выходного потока струи на процессы турбулентного смешения как в ближней, так и в дальней зоне, а также на конечные характеристики при процессе горения с $Re=3600-3800$. Показано, что, вопреки некоторым общим предположениям, увеличение когерентности крупномасштабных структур может снизить скорость молекулярного смешения. Кроме того, авторами обнаружено, что разного рода усиления, вызывают увеличение объема пламени по сравнению с простой струей, что, тем не менее, уменьшает скорость молекулярного смешения.

Проблема истечения жидкой струи из квадратного и прямоугольного сопел в жидкую среду изучается в [107] с целью выявления характеристик смешения и механизмов течения. В результате получено, что в струе, вдуваемой из квадратного сопла, скорость смешения выше, чем для струи из прямоугольного сопла. Более того, возмущенная струя на выходе из сопла приобретает шестикратно превышающую турбулентную кинетическую энергию по сравнению с результатами для невозмущенной струи.

Влияние дополнительного возмущения на уровень снижения шума исследуется в работе [108] для течения турбулентной дозвуковой струи, а в работе [109] эта же проблема исследуется для квадратной сверхзвуковой струи.

Методика наложения дополнительных усилений для течения турбулентной струи в замкнутом контуре с числом Маха $M=0.05$ предлагается в [110]. Авторы численно осуществляют замкнутое управление вдувом струи путем метода подавления волны возмущения. Установлено, что затухание возмущений происходит как вверх по потоку, так и на протяженном расстоянии ниже по течению. Исследование помогает авторам достигнуть контролируемого вдува турбулентной струи в замкнутых пространствах.

В работе [111] численно исследуется течение сильно недорасширенной струи, возмущенной синусоидальным статистическим давлением на входе в сопло. Обнаружено, что внешнее дополнительное усиление оказывает заметное влияние на смешение струи. При низкой частоте возмущения смешение струи увеличивается ниже по потоку. При воздействии на высокой частоте смешение усиливается вверх по потоку, но уменьшается ниже в продольном направлении.

Комбинированное возмущение осевыми и хлопающими типами возмущений на круглых и прямоугольных струях, вызывающее явление раздвоения струи, подробно анализируется авторами работ [112-113]. Получено, что при соотношении частот обоих возмущений, равному 2, воздействие дышащего типа возмущений толкает вихревые кольца поочередно с обеих сторон, заставляя вихревое кольцо наклоняться. Также с ростом скорости, струя раздваивается, причем угол бифуркации сильно зависит от частоты осевого возмущения. Авторами выявляется оптимальная частота, приводящая к наибольшему углу раздвоения, и таким образом определяется наивысшая скорость смешения.

В работе [114] исследовалась численно проблема истечения турбулентной струи с числом Рейнольдса $Re=71000$, усиленной парой возмущенных струй, сдвинутых по фазе на 180° , с помощью LES моделирования. Влияние частоты пульсаций на эффективность смешения и когерентные структуры подробно рассматривается на примере шести случаев: невозмущенного случая и пяти случаев возмущенной струи с разными частотами. В результате выявлено, что эффективность смешения увеличивается при низкой частоте пульсации и, наоборот, снижается при высокой частоте. Также авторами предлагается оптимальная частота возмущений.

Авторы [115] при помощи RANS-моделирования производят параметрическое исследование влияния вдува прямоугольных антисимметричных возмущенных струй с различной частотой дополнительных усилений на улучшение смешения. Подробно изучаются средняя потенциальная длина центральной линии и контуры осевой скорости струи в различных сечениях вниз по потоку. Получено, что наилучший эффект смешения может быть достигнут при одинаковом массовом соотношении потока и вдуваемой струи, если используется нужная частота пертурбаций.

В работе [116] исследуется нелинейная реакция роста слоя смешения на воздействие высокой амплитуды в струе, и в основном авторы фокусируются на первоначально ламинарных струях.

1.4. Выводы.

Проведенный в данной главе литературный обзор позволяет сделать заключение, что наряду с хорошо известными RANS существует немало способов моделирования турбулентности, одни из которых разрешают весь диапазон возникаемых когерентных структур, характеризующих турбулентное течение (DNS), другие же разрешают только основной энергосодержащий масштаб вихрей (LES), при этом мелкомасштабная структура моделируется с использованием известных моделей. Каждый из способов имеет как свои преимущества, так и недостатки, тем не менее особое внимание в последние года уделяется гибридным RANS-LES моделям, в особенности методам генерации синтетической турбулентности, модификация которых позволяет генерировать на входе турбулентность, близкую к реальной (анизотропность турбулентности).

Также по проведенному обзору, можно сделать вывод, что численное моделирование с введением дополнительного детерминистического возмущения, как методики улучшения смешения сверхзвуковых струй со сверхзвуковым потоком, является малоизученным на данный момент, тогда как в случае дозвуковых течений исследование применения этой методики представлено большим количеством работ. Тем не менее, количество экспериментальных работ с использованием детерминистического воздействия достаточно хорошо представлено, как для дозвукового, так и для около- и сверх- звукового истечения струи в спутный поток.

2 ПОСТАНОВКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И ФОРМУЛИРОВКА КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ И МЕТОДА РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА.

В этой главе строится математическая модель проблем, которые численно исследуются в данной работе. Также представляется алгоритм решения системы трехмерных, осредненных по пространству уравнений движения Навье-Стокса.

2.1. Вывод основных уравнений, осредненных по LES.

В работе производится численное моделирование вдува сверхзвуковых газовых струй в сверхзвуковом потоке воздуха в трехмерном канале. Такое течение является турбулентным и здесь в качестве турбулентной модели при расчете используется LES (Large eddy simulation) моделирование.

Поставленная проблема описывается системой трехмерных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного совершенного газа (записана в декартовой системе координат в консервативной форме):

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial(\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial(\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial y} + \frac{\partial(\vec{G} - \vec{G}_v)}{\partial z} = 0 \quad (2.1.1)$$

где вектора зависимых параметров и потоков определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{U} &= (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E_t)^T \\ \vec{E} &= (\rho u, \rho u^2 + P, \rho uv, \rho uw, (E_t + P)u)^T \\ \vec{F} &= (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + P, \rho vw, (E_t + P)v)^T \\ \vec{G} &= (\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^2 + P, (E_t + P)w)^T \\ \vec{E}_v &= (0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x)^T \\ \vec{F}_v &= (0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y)^T \\ \vec{G}_v &= (0, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z)^T \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Компоненты вязкого тензора напряжений заданы в виде:

$$\tau_{xx} = \frac{2\mu}{3\text{Re}} (2u_x - v_y - w_z);$$

$$\tau_{yy} = \frac{2\mu}{3Re} (2v_y - u_x - w_z);$$

$$\tau_{zz} = \frac{2\mu}{3Re} (2w_z - u_x - v_y);$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu}{Re} (u_y + v_x);$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu}{Re} (u_z + w_x);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\mu}{Re} (v_z + w_y)$$

Тепловые потоки представлены как:

$$q_x = -\frac{\mu}{(\gamma-1)M_\infty^2 Pr Re} T_x; \quad q_y = -\frac{\mu}{(\gamma-1)M_\infty^2 Pr Re} T_y; \quad q_z = -\frac{\mu}{(\gamma-1)M_\infty^2 Pr Re} T_z.$$

Давление и температура задаются следующим образом:

$$P = (\gamma - 1) \left[E_t - \frac{1}{2} (\rho u^2 + \rho w^2 + \rho v^2) \right]$$

$$T = \left(\frac{1}{\rho c_v} \right) \left[E_t - \frac{1}{2} (\rho u^2 + \rho w^2 + \rho v^2) \right] \quad (2.1.3)$$

$$c_v = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)M_\infty^2}$$

В системе уравнений (2.1.1–2.1.3) u, w, v являются компонентами вектора скорости, ρ – плотность, c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме, γ – отношение удельных теплоемкостей, M_∞ – число Маха потока.

Система уравнений (2.1.1 – 2.1.3) записана в безразмерном виде, где, в качестве определяющих, приняты параметры потока – $u_\infty, \rho_\infty, T_\infty$, давление P и полная энергия E_t отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$, характерным параметром длины является начальная толщина потери импульса δ_θ (начальная толщина слоя смешения):

$$\delta_\theta(x) = \int_{-H/2}^{+H/2} (\bar{\rho}(\tilde{u} - u_\infty) \cdot (u_0 - \tilde{u}) / (\rho_\infty \Delta u^2)) dz$$

где $\tilde{u} = (u - u_\infty) / \Delta u$, $\Delta u = u_0 - u_\infty$.

Pr, Re – числа Прандтля и Рейнольдса, соответственно. Индекс 0 относится к параметрам струи, а индекс ∞ к параметрам потока. Здесь $\delta_\theta = 0.002$ м [117].

Для того чтобы использовать LES моделирование, суть которого оговаривалась в главе 1.1, необходимо провести процедуру осреднения для системы (2.1.1– 2.1.3). Ниже представлена процедура осреднения на примере уравнения неразрывности и уравнения движения в направлении x .

Любая переменная течения φ может быть разложена на крупномасштабные и мелкомасштабные компоненты и фильтрована соответствующим интегралом [118] следующим образом:

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi', \text{ где } \bar{\varphi} = \int_D G(x - z, \Delta) \varphi(x, t) dx dy dz \quad (2.1.4)$$

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi'', \text{ где } \tilde{\varphi} = \int_D G(x - z, \Delta) \rho(x, t) \varphi(x, t) dx dy dz \quad (2.1.5)$$

Здесь, как в случае осреднения по Фавру [119], для φ применяется осреднение «взвешенное по плотности»:

$$\tilde{\varphi} = \frac{\int_D G(x - z, \Delta) \rho(x, t) \varphi(x, t) dx dy dz}{\int_D G(x - z, \Delta) \rho(x, t) dx dy dz} = \frac{\bar{\rho} \bar{\varphi}}{\bar{\rho}} \quad (2.1.6)$$

Тогда

$$\bar{\rho} \bar{\varphi} = \bar{\rho} \tilde{\varphi} = \int_D G(x - z, \Delta) \rho(x, t) \varphi(x, t) dx dy dz$$

где φ – любая функция $\varphi = u, v, w, T, P, E_t$, D – область ячейки, Δ – ширина “grid-filter”, $G(x - z, \Delta)$ – функция фильтра с характерной шириной Δ , удовлетворяющей условию нормировки:

$$\int_D G(x - z, \Delta) dx dy dz = 1 \quad (2.1.7)$$

Свойства фильтрации по LES: $\overline{\varphi''} \neq 0, \tilde{\tilde{\varphi}} \neq \tilde{\varphi}$.

Для применения фильтрации к уравнению неразрывности необходимо сначала умножить его на функцию фильтра $G(x - z, \Delta)$ с характерной шириной Δ :

$$G \frac{\partial \rho}{\partial t} + G \frac{\partial \rho u}{\partial x} + G \frac{\partial \rho v}{\partial y} + G \frac{\partial \rho w}{\partial z} \quad (2.1.8)$$

Если внести G под знак дифференциала в уравнении (2.1.8), то оно принимает вид:

$$\frac{\partial G\rho}{\partial t} - \rho \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G\rho u}{\partial x} - \rho u \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G\rho v}{\partial y} - \rho v \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G\rho w}{\partial z} - \rho w \frac{\partial G}{\partial z} \quad (2.1.9)$$

т.к. G не зависит от времени, то:

$$\frac{\partial G\rho}{\partial t} + \frac{\partial G\rho u}{\partial x} + \frac{\partial G\rho v}{\partial y} + \frac{\partial G\rho w}{\partial z} - \rho \left(u \frac{\partial G}{\partial x} + v \frac{\partial G}{\partial y} + w \frac{\partial G}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.1.10)$$

Далее производится интегрирование этого уравнения по ячейке:

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \frac{\partial G\rho}{\partial t} dx dy dz + \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \frac{\partial G\rho u}{\partial x} dx dy dz \\ & + \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \frac{\partial G\rho v}{\partial y} dx dy dz + \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \frac{\partial G\rho w}{\partial z} dx dy dz \\ & - \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \rho u \frac{\partial G}{\partial x} dx dy dz - \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \rho v \frac{\partial G}{\partial y} dx dy dz \\ & - \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \rho w \frac{\partial G}{\partial z} dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Внося интеграл под знак дифференциала, (2.1.11) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} G\rho dx dy dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} G\rho u dx dy dz \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} G\rho v dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} G\rho w dx dy dz \\ & - \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \rho u \frac{\partial G}{\partial x} dx dy dz - \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \rho v \frac{\partial G}{\partial y} dx dy dz \\ & - \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \rho w \frac{\partial G}{\partial z} dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Учитывая (2.1.4) и (2.1.5), (2.1.12) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\rho} \bar{v} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho} \bar{w} = \\
& = \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \rho u \frac{\partial G}{\partial x} dx dy dz + \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \rho v \frac{\partial G}{\partial y} dx dy dz \\
& + \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \rho w \frac{\partial G}{\partial z} dx dy dz = 0
\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

где $\bar{\rho} = \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} G \rho dx dy dz$, $\bar{\rho} \bar{u} = \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} G \rho u dx dy dz$,

$\bar{\rho} \bar{v} = \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} G \rho v dx dy dz$, $\bar{\rho} \bar{w} = \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} G \rho w dx dy dz$

Тогда фильтрованное уравнение неразрывности в консервативной форме имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{w}}{\partial z} = \\
& = \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \rho u \frac{\partial G}{\partial x} dx dy dz + \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \rho v \frac{\partial G}{\partial y} dx dy dz \\
& + \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \rho w \frac{\partial G}{\partial z} dx dy dz
\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

или

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{w}}{\partial z} = RHS_{G\rho} \tag{2.1.14}$$

где

$$\begin{aligned}
RHS_{G\rho} = & \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \rho u \frac{\partial G}{\partial x} dx dy dz + \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \rho v \frac{\partial G}{\partial y} dx dy dz \\
& + \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta z} \rho w \frac{\partial G}{\partial z} dx dy dz
\end{aligned}$$

В простейшем случае рассматривается функция G , которая не зависит от координат $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial z} = 0$, так что в этом случае операции фильтрации и дифференцирования коммутативны, т.е.

$$G \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial Gf}{\partial x_i} \quad (2.1.15)$$

В этом случае член, стоящий в правой части, будет равен нулю, тогда (2.1.15) переписется в виде

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (2.1.16)$$

К уравнению (2.1.4) - (2.1.5) применяется операция фильтрации (2.1.4) - (2.1.5) в направлении x , аналогично уравнению неразрывности в главе 2.1.1, где также уравнения умножаются на G и интегрируются по ячейке. Это приводит к следующему виду:

$$G \frac{\partial \rho u}{\partial t} + G \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + G \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + G \frac{\partial \rho u w}{\partial z} = -G \frac{\partial P}{\partial x} + G \operatorname{div} A \quad (2.1.17)$$

Внеся G под дифференциал и учитывая, что $G = G(x, y, z)$, $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$, получается:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G \rho u}{\partial t} - \rho u \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G \rho u u}{\partial x} - \rho u u \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G \rho u v}{\partial y} - \rho u v \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G \rho u w}{\partial z} - \rho u w \frac{\partial G}{\partial z} = - \left(\frac{\partial G P}{\partial x} - P \frac{\partial G}{\partial x} \right) + \operatorname{div} G A - A \operatorname{div} G \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

и после интегрирования, получается:

$$\begin{aligned} & \iiint \frac{\partial G \rho u}{\partial t} dx dy dz + \iiint \frac{\partial G \rho u u}{\partial x} dx dy dz - \iiint \rho u u \frac{\partial G}{\partial x} dx dy dz \\ & + \iiint \frac{\partial G \rho u v}{\partial y} dx dy dz - \iiint \rho u v \frac{\partial G}{\partial y} dx dy dz \\ & + \iiint \frac{\partial G \rho u w}{\partial z} dx dy dz - \iiint \rho u w \frac{\partial G}{\partial z} dx dy dz \\ & = - \iiint \frac{\partial G P}{\partial x} dx dy dz + \iiint P \frac{\partial G}{\partial x} dx dy dz \\ & + \iiint \operatorname{div} G A dx dy dz - \iiint A \operatorname{div} G dx dy dz \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Применяя условия (2.1.4) - (2.1.5) к (2.1.19), получается:

$$\begin{aligned}
\iiint \frac{\partial G\rho u}{\partial t} dx dy dz &= \frac{\partial}{\partial t} \iiint G\rho u dx dy dz = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}\bar{u} \\
\iiint \frac{\partial GP}{\partial x} dx dy dz &= \frac{\partial}{\partial x} \iiint GP dx dy dz = \frac{\partial}{\partial x} \bar{P} \\
\iiint \frac{\partial G\rho uu}{\partial x} dx dy dz &= \frac{\partial}{\partial x} \iiint G\rho uu dx dy dz = \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho}\bar{u}\bar{u} \\
\iiint \frac{\partial G\rho uv}{\partial y} dx dy dz &= \frac{\partial}{\partial y} \iiint G\rho uv dx dy dz = \frac{\partial}{\partial y} \bar{\rho}\bar{u}\bar{v} \\
\iiint \frac{\partial G\rho uw}{\partial z} dx dy dz &= \frac{\partial}{\partial z} \iiint G\rho uw dx dy dz = \frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho}\bar{u}\bar{w} \\
\iiint \operatorname{div} G A dx dy dz &= \operatorname{div} \iiint G A dx dy dz = \operatorname{div} \bar{A}
\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Подставляя (2.1.20) в (2.1.19), получается следующее отфильтрованное уравнение движения:

$$\frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}\bar{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \operatorname{div} \bar{A} = \operatorname{RHS}_{G_x} \tag{2.1.21}$$

где

$$\begin{aligned}
\operatorname{RHS}_{G_x} &= \iiint \rho uu \frac{\partial G}{\partial x} dx dy dz + \iiint \rho uv \frac{\partial G}{\partial y} dx dy dz \\
&\quad + \iiint \rho uw \frac{\partial G}{\partial z} dx dy dz + \iiint P \frac{\partial G}{\partial x} dx dy dz - \iiint A \operatorname{div} G dx dy dz
\end{aligned}$$

Как видно, в уравнении (2.1.21) появляются произведения средних скоростей $\bar{u}\bar{u}$, $\bar{u}\bar{v}$, $\bar{u}\bar{w}$. Аналогично авторам работы [118], к полученному отфильтрованному уравнению движения (2.1.21) можно добавить и отнять $\frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}\bar{u}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}\bar{v}}{\partial y}$, $\frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}\bar{w}}{\partial z}$. Тогда уравнение движения в направлении x запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}\bar{w}}{\partial z} \\
= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \operatorname{div} \bar{A} - \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\bar{u} - \bar{\rho}\bar{u}\bar{u})}{\partial x} - \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\bar{v} - \bar{\rho}\bar{u}\bar{v})}{\partial y} \\
- \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}\bar{w} - \bar{\rho}\bar{u}\bar{w})}{\partial z} + \operatorname{RHS}_{G_x}
\end{aligned} \tag{2.1.22}$$

где

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \bar{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\tau}_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\tau}_{xz} \\
&= \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}
\end{aligned}$$

Пусть выражение $-\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j = \Gamma_{ij}$, где Γ_{ij} – подсеточный тензор, который принимает вид:

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ij} - \frac{1}{3} \Gamma_{ll} \delta_{ij} + \frac{1}{3} \Gamma_{ll} \delta_{ij} = \bar{\tau}_{ij} + \frac{1}{3} \Gamma_{ll} \delta_{ij} \quad (2.1.23)$$

где $\bar{\tau}_{ij}$ – подсеточные напряжения. Их необходимо определить для того, чтобы замкнуть основную систему уравнений.

Таким образом вектор консервативных переменных имеет следующий вид:

$$\bar{F}_i = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \tilde{u}_i \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_1 + \left(\bar{P} - \frac{1}{3} T_{ll} \right) \delta_{i1} - \bar{\tau}_{i1} - \overline{2\mu A_{i1}} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_2 + \left(\bar{P} - \frac{1}{3} T_{ll} \right) \delta_{i2} - \bar{\tau}_{i2} - \overline{2\mu A_{i2}} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_3 + \left(\bar{P} - \frac{1}{3} T_{ll} \right) \delta_{i3} - \bar{\tau}_{i3} - \overline{2\mu A_{i3}} \\ \overline{(\rho e + P) u_i} - \overline{2\mu A_{ij} u_j} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (2.1.24)$$

Уравнения для полной энергии запишется в виде:

$$\bar{\rho} \dot{e} = \bar{\rho} C_v \dot{T} + \frac{1}{2} \bar{\rho} (\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2) - \frac{1}{2} T_{ll} \quad (2.1.25)$$

Введем макродавление и макротемпературы в виде:

$$\begin{aligned}
\bar{p} &= \bar{P} - \frac{1}{3} T_{ll} \\
\bar{\vartheta} &= \tilde{T} - \frac{1}{2C_v \bar{\rho}} T_{ll}
\end{aligned} \quad (2.1.26)$$

Тогда получим выражение для полной энергии:

$$\bar{\rho}\bar{e} = \bar{\rho}C_v\bar{\vartheta} + \frac{1}{2}\bar{\rho}(\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2) \quad (2.1.27)$$

Вектор консервативных переменных переписывается в виде:

$$\bar{F}_i = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{u}_i \\ \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_1 + \bar{p}\delta_{i1} - \bar{\tau}_{i1} - \overline{2\mu A_{i1}} \\ \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_2 + \bar{p}\delta_{i2} - \bar{\tau}_{i2} - \overline{2\mu A_{i2}} \\ \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_3 + \bar{p}\delta_{i3} - \bar{\tau}_{i3} - \overline{2\mu A_{i3}} \\ (\bar{\rho}\bar{e} + \bar{p})\tilde{u}_i - \overline{2\mu A_{ij}u_j} - \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (2.1.28)$$

По аналогии с осредненными по Фавру уравнениями Навье-Стокса, согласно гипотезе Бусинеска, подсеточные напряжения заменяются следующим выражением:

$$\mu_{sgs} = \rho(C\Delta)^2 \sqrt{\bar{A}_{ij}\bar{A}_{ij}} \quad (2.1.29)$$

где C – полуэмпирический коэффициент модели, $\Delta = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ – ширина фильтра.

Выражение (2.1.29) называется моделью Смагоринского. С учетом выражения (2.1.29) вектор (2.1.28) принимает вид:

$$\bar{F}_i = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{u}_i \\ \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_1 + \bar{p}\delta_{i1} - \overline{2\mu_{eff}A_{i1}} \\ \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_2 + \bar{p}\delta_{i2} - \overline{2\mu_{eff}A_{i2}} \\ \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_3 + \bar{p}\delta_{i3} - \overline{2\mu_{eff}A_{i3}} \\ (\bar{\rho}\bar{e} + \bar{p})\tilde{u}_i - \overline{2\mu_{eff}A_{ij}u_j} - (\bar{\lambda} + \bar{\rho}C_p) \frac{\mu_{sgs}}{\rho t_{sgs}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (2.1.30)$$

где μ_{eff} – эффективная вязкость, которая равна сумме динамической и вихревой вязкостей: $\mu_{eff} = \mu_l + \mu_{sgs}$, μ_l определяется из формулы Сазерленда.

Таким образом, получаем исходную систему трехмерных отфильтрованных по LES уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного совершенного газа, записанную в декартовой системе координат в консервативной форме:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial(\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial(\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial y} + \frac{\partial(\vec{G} - \vec{G}_v)}{\partial z} = 0 \quad (2.1.21)$$

где вектора зависимых параметров и потоков определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\vec{U} &= (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E_t)^T; \\ \vec{E} &= (\rho u, \rho u^2 + P, \rho uv, \rho uw, (E_t + P)u)^T \\ \vec{F} &= (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + P, \rho vw, (E_t + P)v)^T; \\ \vec{G} &= (\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^2 + P, (E_t + P)w)^T \\ \vec{E}_v &= (0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x)^T; \\ \vec{F}_v &= (0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y)^T; \\ \vec{G}_v &= (0, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z)^T\end{aligned}$$

Компоненты вязкого тензора напряжений заданы в виде:

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \frac{2\mu_{eff}}{3Re} (2u_x - v_y - w_z); \quad \tau_{yy} = \frac{2\mu_{eff}}{3Re} (2v_y - u_x - w_z); \\ \tau_{zz} &= \frac{2\mu_{eff}}{3Re} (2w_z - u_x - v_y); \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{\mu_{eff}}{Re} (u_y + v_x); \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu_{eff}}{Re} (u_z + w_x); \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \frac{\mu_{eff}}{Re} (v_z + w_y)\end{aligned}$$

Тепловые потоки представлены как:

$$\begin{aligned}q_x &= -\frac{\mu_{eff}}{(\gamma - 1)M_\infty^2 Pr Re} T_x; \quad q_y = -\frac{\mu_{eff}}{(\gamma - 1)M_\infty^2 Pr Re} T_y; \\ q_z &= -\frac{\mu_{eff}}{(\gamma - 1)M_\infty^2 Pr Re} T_z\end{aligned}$$

2.2. Построение алгоритма решения уравнений с применением ENO-схемы высокого порядка.

В настоящее время для численного решения задачи сверхзвукового течения с ударно-волновой структурой широко применяются TVD схемы, ENO, WENO схемы. В работах [120, 121] авторы развили ENO-схему на

основе идеи метода Годунова и показали применимость схемы к решению задачи сверхзвукового течения многокомпонентного газа в канале с вдувом перпендикулярных струй.

Решение системы (2.1.21) осуществляется полу-неявным методом, согласно которому на первом шаге производится факторизация системы уравнений, в результате которой трехмерная задача сводится к трем одномерным задачам в направлениях ξ , ζ , η . На втором шаге полученные одномерные операторы решаются неявно, методом матричной прогонки относительно вектора \tilde{U} . Здесь, конвективные члены аппроксимируются с использованием ENO-схемы третьего порядка точности. Для аппроксимации диффузионных членов используется центрально-разностная аппроксимация второго порядка точности. Ниже представлен процесс реализации ENO-схемы для системы уравнений (2.1.21) в обобщенных координатах:

$$\xi = \xi(x), \quad \eta = \eta(z), \quad \zeta = \zeta(y) \quad (2.2.1)$$

Тогда система (2.1.21) в обобщенных координатах запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \tilde{E}_{v2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{E}_{vm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_{v2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{G}_{vm}}{\partial \zeta} \quad (2.2.2)$$

где

$$\tilde{U} = \frac{1}{J} U, \quad \tilde{E} = \left(\frac{\xi_x}{J}\right) E, \quad \tilde{F} = \left(\frac{\eta_z}{J}\right) F, \quad \tilde{E}_{v2} = \left(\frac{\xi_x}{J}\right) E_{v2}, \quad \tilde{E}_{vm} = \left(\frac{\xi_x}{J}\right) E_{vm}, \quad \tilde{F}_{v2} = \left(\frac{\eta_z}{J}\right) F_{v2}, \quad \tilde{F}_{vm} = \left(\frac{\eta_z}{J}\right) F_{vm}, \quad \tilde{G}_{v2} = \left(\frac{\zeta_y}{J}\right) G_{v2}, \quad \tilde{G}_{vm} = \left(\frac{\zeta_y}{J}\right) G_{vm}$$

$J = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, z, y)}$ – якобиан преобразования, \tilde{E}_{vm} , \tilde{E}_{v2} – диффузионные члены, содержащие смешанные и вторые производные.

В соответствии с принципом построения ENO-схемы, исходная система уравнений формально представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + (\hat{A}^+ + \hat{A}^-) \frac{\partial E^m}{\partial \xi} + (\hat{B}^+ + \hat{B}^-) \frac{\partial F^m}{\partial \eta} + (\hat{Q}^+ + \hat{Q}^-) \frac{\partial G^m}{\partial \zeta} - \\ - \left[\frac{\partial(\tilde{E}_{v2} + \tilde{E}_{vm})}{\partial \xi} + \frac{\partial(\tilde{F}_{v2} + \tilde{F}_{vm})}{\partial \eta} - \frac{\partial(\tilde{G}_{v2} + \tilde{G}_{vm})}{\partial \zeta} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{E}^m &= \begin{cases} \tilde{E}^{n+1} & \text{для неявной без добавочных членов} & \text{(а)} \\ \tilde{E}^{n+1} + (\vec{E}_\xi + \vec{D}_\xi)^n & \text{для неявной ENO схемы} & \text{(б)} \\ \tilde{E}^n + (\vec{E}_\xi + \vec{D}_\xi)^n & \text{для явной ENO схемы} & \text{(в)} \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$A = \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{U}}, B = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{U}}, Q = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{U}} - \text{матрицы Якоби}$$

$$\hat{A}^\pm = R \hat{\Lambda}_\xi R^{-1} = R \left(\frac{1 \pm \text{sign}(\Lambda_\xi)}{2} \right) R^{-1}$$

$$\hat{B}^\pm = T \hat{\Lambda}_\eta T^{-1} = T \left(\frac{1 \pm \text{sign}(\Lambda_\eta)}{2} \right) T^{-1}$$

$$\hat{Q}^\pm = S \hat{\Lambda}_\zeta S^{-1} = S \left(\frac{1 \pm \text{sign}(\Lambda_\zeta)}{2} \right) S^{-1}$$

$E^m = \tilde{E} + E_\xi + D_\xi$, $F^m = \tilde{F} + E_\eta + D_\eta$, $G^m = \tilde{G} + E_\zeta + D_\zeta$ – модифицированные потоки в узловых точках (i,j,k) , состоящие из исходных конвективных векторов $(\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G})$ и добавочных членов высокого порядка точности $(E_\xi, D_\xi, E_\eta, D_\eta, E_\zeta, D_\zeta)$, подробно описанных в [120, 121].

После факторизации одношаговой конечно-разностной схемы для интегрирования по времени уравнения (2.2.3) получается следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \left\{ I + \Delta t \left[(\hat{A}^+ + \hat{A}^-)^n \frac{\partial}{\partial \xi} A_\xi^n \cdot - \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\mu}_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\tilde{U}_1} \cdot \right] \right\} \times \\ & \left\{ I + \Delta t \left[(\hat{B}^+ + \hat{B}^-)^n \frac{\partial}{\partial \eta} B_\eta^n \cdot - \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{\mu}_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\tilde{U}_1} \cdot \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ I + \Delta t \left[(\hat{Q}^+ + \hat{Q}^-)^n \frac{\partial}{\partial \zeta} Q_\zeta^n \cdot - \frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{\mu}_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{\tilde{U}_1} \cdot \right] \right\} \tilde{U}^{n+1} = \\ & = \tilde{U}^n + \Delta t \left[\frac{\partial \tilde{E}_{v22}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v22}^n}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_{v22}^n}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (2\tilde{E}_{vm}^n - \tilde{E}_{vm}^{n-1}) + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \eta} (2\tilde{F}_{vm}^n - \tilde{F}_{vm}^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (2\tilde{G}_{vm}^n - \tilde{G}_{vm}^{n-1}) \right] - \Delta t \left[(\hat{A}^+ + \hat{A}^-) \frac{\partial}{\partial \xi} (E_\xi + \right. \\ & \left. D_\xi) + (\hat{B}^+ + \hat{B}^-) \frac{\partial}{\partial \eta} (E_\eta + D_\eta) + (\hat{Q}^+ + \hat{Q}^-) \frac{\partial}{\partial \zeta} (E_\zeta + D_\zeta) \right]^n \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

где $A_\xi = \xi_x A$, $B_\eta = \eta_z B$, $Q_\zeta = \zeta_y Q$, причем $\hat{A}^+ + \hat{A}^- = I$, I – единичная матрица, $\tilde{\mu}_\xi = \frac{\mu \xi_x^2}{Re J}$, $\tilde{\mu}_\eta = \frac{\mu \eta_z^2}{Re J}$, $\tilde{\mu}_\zeta = \frac{\mu \zeta_y^2}{Re J}$.

Сама реализация факторизации уравнений (2.2.3) производится следующим образом:

Шаг 1:

$$\begin{aligned} & \left[I + \Delta t \left\{ \frac{\hat{A}_{\xi i-1/2}^+ \Delta - A_\xi^n + \hat{A}_{\xi i+1/2}^- \Delta + A_\xi^n}{\Delta \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\mu \xi_x^2}{Re J} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{U_1^n} \right)_{ijk} \right\} \right] \vec{U}^* \\ & = RHS_\xi^n + \\ & + RHS_\eta^n + RHS_\zeta^n \\ & + \left(\frac{\partial (\tilde{E}_{v22} + \tilde{E}_{vm})^n}{\partial \xi} + \frac{\partial (\tilde{F}_{v22} + \tilde{F}_{vm})^n}{\partial \eta} \right. \\ & \left. + \frac{\partial (\tilde{G}_{v22} + \tilde{G}_{vm})^n}{\partial \zeta} \right)_{ijk} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Шаг 2:

$$\vec{U}^* \left[I + \Delta t \left\{ \frac{\hat{B}_{j-1/2}^+ \Delta - B_\eta^n + \hat{B}_{j+1/2}^- \Delta + B_\eta^n}{\Delta \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu \eta_y^2}{Re J} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{U_1^n} \right)_{ijk} \right\} \right] \vec{U}^{**} =$$

Шаг 3:

$$\left[I + \Delta t \left\{ \frac{\hat{Q}_{k-1/2}^+ \Delta - Q_\zeta^n + \hat{Q}_{k+1/2}^- \Delta + Q_\zeta^n}{\Delta \zeta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\mu \zeta_z^2}{Re J} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{U_1^n} \right)_{ijk} \right\} \right] \vec{U}^{n+1} = \vec{U}^{**}$$

Здесь

$$\begin{aligned} RHS_\xi^n = & \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left\{ \hat{A}_{i+1/2,j,k}^- \left[(\vec{E}_\xi + \vec{D}_\xi)_{i+1,j,k} - (\vec{E}_\xi + \vec{D}_\xi)_{ijk} \right]^n + \right. \\ & \left. + \hat{A}_{i-1/2,j,k}^+ \left[(\vec{E}_\xi + \vec{D}_\xi)_{ijk} - (\vec{E}_\xi + \vec{D}_\xi)_{i-1,j,k} \right]^n \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \hat{A}_{i-1/2j,k}^+ \left[(\vec{E}_\xi + \vec{D}_\xi)_{ijk} \right]^n = \\ & (R\hat{\Lambda}_\xi^+ R^{-1})_{i-1/2j,k} \left[\minmod(\bar{E}_{\xi i-1/2j,k}, \bar{E}_{\xi i+1/2j,k}) + \right. \\ & \left. \begin{cases} \dot{m}(\Delta_- \hat{D}_{\xi i-1/2j,k}, \Delta_+ \hat{D}_{\xi i-1/2j,k}) & \text{если } |\Delta_- \Delta_- \tilde{U}_{ijk}^n| \leq |\Delta_- \Delta_+ \tilde{U}_{ijk}^n| \\ \dot{m}(\Delta_- \bar{D}_{\xi i+1/2j,k}, \Delta_+ \bar{D}_{\xi i+1/2j,k}) & \text{если } |\Delta_- \Delta_- \tilde{U}_{ijk}^n| > |\Delta_- \Delta_+ \tilde{U}_{ijk}^n| \end{cases} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \hat{A}_{i+1/2j,k}^- \left[(\vec{E}_\xi + \vec{D}_\xi)_{ijk} \right]^n = \\ & -(R\hat{\Lambda}_\xi^- R^{-1})_{i+1/2j,k} \left[\minmod(\bar{E}_{\xi i-1/2j,k}, \bar{E}_{\xi i+1/2j,k}) - \right. \\ & \left. \begin{cases} \dot{m}(\Delta_- \bar{D}_{\xi i-1/2j,k}, \Delta_+ \bar{D}_{\xi i+1/2j,k}) & \text{если } |\Delta_- \Delta_+ \tilde{U}_{ijk}^n| \leq |\Delta_+ \Delta_+ \tilde{U}_{ijk}^n| \\ \dot{m}(\Delta_- \hat{D}_{\xi i-1/2j,k}, \Delta_+ \hat{D}_{\xi i-1/2j,k}) & \text{если } |\Delta_- \Delta_+ \tilde{U}_{ijk}^n| > |\Delta_+ \Delta_+ \tilde{U}_{ijk}^n| \end{cases} \right], \end{aligned}$$

где

$$\bar{E}_{\xi i-1/2j,k} = \frac{1}{2} \left(I - \left| \frac{\Delta t}{\Delta \xi} A_{\xi i-\frac{1}{2}} \right| \right) \Delta_- \tilde{U}_{ijk}^n,$$

$$\bar{E}_{\xi i+1/2j,k} = \frac{1}{2} \left(I - \left| \frac{\Delta t}{\Delta \xi} A_{\xi i+\frac{1}{2}} \right| \right) \Delta_+ \tilde{U}_{ijk}^n,$$

$$\bar{D}_{\xi i-1/2j,k} = \frac{1}{6} \left(\left| \frac{\Delta t}{\Delta \xi} A_{\xi i-\frac{1}{2}} \right|^2 - I \right) \Delta_- \tilde{U}_{ijk}^n,$$

$$\bar{D}_{\xi i+1/2j,k} = \frac{1}{6} \left(\left| \frac{\Delta t}{\Delta \xi} A_{\xi i+\frac{1}{2}} \right|^2 - I \right) \Delta_+ \tilde{U}_{ijk}^n,$$

$$\hat{D}_{\xi i-1/2j,k} = \frac{1}{6} \left(2I - 3 \left| \frac{\Delta t}{\Delta \xi} A_{\xi i-\frac{1}{2}} \right| + \left| \frac{\Delta t}{\Delta \xi} A_{\xi i-\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \Delta_- \tilde{U}_{ijk}^n,$$

$$\hat{D}_{\xi i+1/2j,k} = \frac{1}{6} \left(2I - 3 \left| \frac{\Delta t}{\Delta \xi} A_{\xi i+\frac{1}{2}} \right| + \left| \frac{\Delta t}{\Delta \xi} A_{\xi i+\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \Delta_+ \tilde{U}_{ijk}^n.$$

а также:

$$\minmod(a, b) = \begin{cases} s \cdot \min(|a|, |b|) & \text{if } \text{sign}(a) = \text{sign}(b) = s \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\dot{m}(a, b) = \begin{cases} a & \text{if } |a| \leq |b| \\ b & \text{if } |a| \geq |b| \end{cases}$$

Второй и третий члены RHS_η^n , RHS_ζ^n записываются аналогично.

При аппроксимации производных в конвективных членах использовался следующий оператор:

$$\begin{aligned} (\hat{A}^- + \hat{A}^+) \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{U} \Big|_{ijk} \\ = \frac{\hat{A}_{\xi i+1/2j,k}^- (\tilde{U}_{i+1jk} - \tilde{U}_{ijk}) + \hat{A}_{\xi i-1/2j,k}^+ (\tilde{U}_{ijk} - \tilde{U}_{i-1jk})}{\Delta \xi} \end{aligned}$$

Сгущение сетки на вдуве струи производится следующим образом [122]:

$$x(\xi) = x_e \left[1 + \frac{sh(\tau(\xi - B))}{sh(\tau B)} \right] \quad (2.2.6)$$

где

$$B = \frac{1}{2\tau} \ln \left[\frac{1 + (e^\tau - 1) \frac{x_e}{L}}{1 + (e^{-\tau} - 1) \frac{x_e}{L}} \right]$$

Для сгущения сетки по центру струи в направлении оси Oz используется преобразование вида:

$$z(\eta) = H \frac{(\beta + 1) - (\beta - 1) \left[\frac{\beta+1}{\beta-1} \right]^{1-\eta}}{\left[\frac{\beta+1}{\beta-1} \right]^{1-\eta} + 1} \quad (2.2.6)$$

где $1 < \beta < \infty$ – параметр сгущения. Сгущение сетки по центру струи в направлении оси Oy производится аналогично.

3 ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ

В данной главе проводится верификация построенной численной модели путем сравнения полученных численных значений с экспериментальными данными авторов Samimy, Elliot et.all [123] для задачи трехмерного турбулентного слоя смешения, возникающего между двумя высокоскоростными потоками с различными физическими параметрами.

3.1. Постановка задачи трехмерного слоя смешения

На входе заданы два параллельных газовых потока с физическими параметрами как на схеме течения:

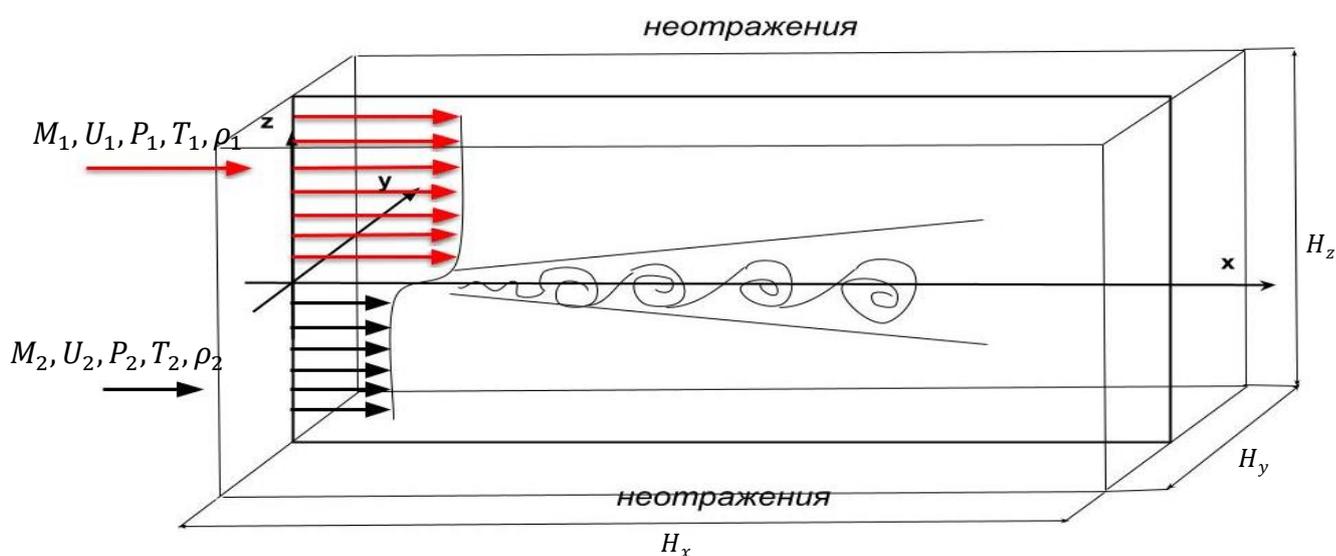


Рис. 3.1.1. Схема трехмерного слоя смешения течения

Параметры потоков газа, заданные на входе, имеют следующий вид:
 верхний поток (индекс 1):

$$u = u_1, \quad v = v_1, \quad w = w_1, \quad p = p_1, \quad T = T_1, \quad M = M_1 \quad (3.1.1)$$

нижний поток (индекс 2):

$$u = u_2, \quad v = v_2, \quad w = w_2, \quad p = p_2, \quad T = T_2, \quad M = M_2 \quad (3.1.2)$$

На месте перехода двух потоков газа вышеуказанные физические переменные определяются функцией гиперболического тангенса:

$$\varphi(z) = 0.5(\varphi_0 + \varphi_\infty) + 0.5(\varphi_0 - \varphi_\infty) \tanh(0.5z / \delta_\theta) \quad (3.1.3)$$

где $\varphi = (u, v, w)$, δ_θ – начальная толщина завихренности.

Как показал анализ работ, проведенный в главе 1.2, для LES моделирования наилучшим выбором граничных условий являются спектральные граничные условия, способные генерировать анизотропную

неоднородную турбулентность, близкую к реальной. Принцип их построения основан на подборе случайного набора параметров, определенных в заданных интервалах. Более детально этот принцип представлен в работах [33, 34]. Здесь граничные условия из [33, 34] адаптируются для случая сверхзвукового истечения и принимают следующий вид:

$$\vec{V}(x_i, t) = \vec{V}(x_i)^{base} + \vec{V}(x_i, t)^{natural} \quad (3.1.4)$$

Здесь $\vec{V} = (u, v, w)$, $(x_i) = (x, y, z)$, а $\vec{V}(x_i)^{base}$ – поле скорости, заданное следующим образом:

$$\vec{V}(x_i)^{base} = \begin{cases} u_1 = 1, v_1 = 0, w_1 = 0 \\ \text{для } x = 0, 0 \leq y \leq H_y, 10 \leq z \leq H_z \\ u_2 = \sqrt{T_2} \frac{M_2}{M_2}, v_2 = 0, w_2 = 0 \\ \text{для } x = 0, 0 \leq y \leq H_y, H_z \leq z \leq 10 \end{cases} \quad (3.1.5)$$

$\vec{V}(x_i, t)^{natural}$:

$$\vec{V}(x_i, t)^{natural} = Q \sum_{n=1}^N \sqrt{q^n} [\cos(k^n \cdot d \cdot x_i + \phi_n)] \quad (3.1.6)$$

где Q – амплитуда генерируемого флуктуационного поля скоростей не превышает 5% от скорости $\vec{V}(x_i)^{base}$ [124, 125], d – случайная частота и ϕ_n – случайный фазовый сдвиг, определенные в интервале $[0; 2\pi t]$.

N – количество мод и q^n – нормированная амплитуда, равная:

$$q^n = \frac{E(k^n) \Delta k^n}{\sum_{n=1}^N E(k^n) \Delta k^n}, \quad \sum_{n=1}^N q^n = 1 \quad (3.1.7)$$

$E(k)$ – модифицированный энергетический спектр фон Кармана:

$$E(k) = \frac{(k/k_e)^4}{[1 + 2.4(k/k_e)^2]^{17/6}} \quad (3.1.8)$$

где

$$k^n = k^{min} \cdot (1 + \alpha)^{n-1}, \quad n = 1 \div N, \alpha = 0.01$$

$$k^{min} = \beta \cdot k_e^{min}, \beta \leq 1, k_e^{min} = \frac{2\pi}{l_e^{max}}$$

$$l_e^{max} = \max(H_x, H_y, H_z)$$

Графическое изображение энергетического спектра по входным параметрам (3.1.4 – 3.1.6) в сравнении со спектром фон Кармана [34] для однородной турбулентности представлено на Рис. 3.1.2:

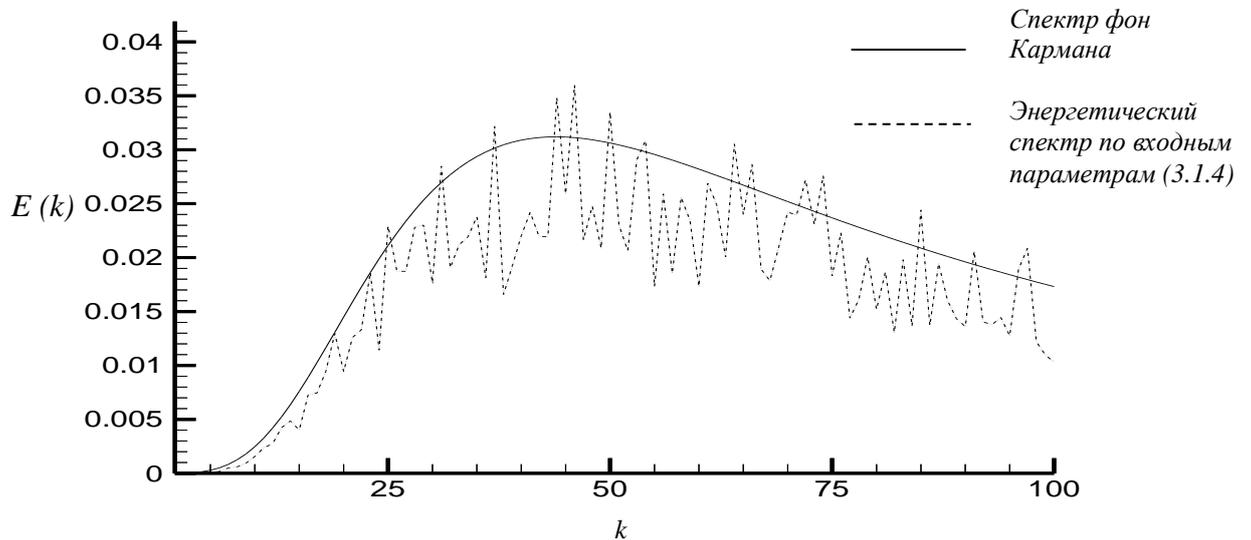


Рис. 3.1.2. Турбулентный энергетический спектр по входным условиям.

Данный спектр является модифицированной версией известного закона Колмогорова $k^{-\frac{5}{3}}$.

Уравнения (2.1.21 – 2.1.24) с граничными, условиями (3.1.4–3.1.6) представляют собой численную модель поставленной проблемы.

3.2 Спектральный анализ анизотропной турбулентности.

Поскольку при LES моделировании исключается разрешение мелких когерентных структур колмогоровского масштаба, одной из основных проблем является выбор вычислительной сетки так, чтобы при моделировании разрешался основной диапазон энергосодержащих вихрей. Для этого необходимо иметь представление о том, как распределяется турбулентная энергия по размерам возникающих когерентных структур или, иными словами, как происходит процесс каскадного переноса энергии в исследуемом течении. Наглядным инструментом, демонстрирующим этот процесс, является график трехмерного энергетического спектра $E(\vec{\lambda}_l)$ в пространстве волновых чисел $\vec{\lambda}_l$.

Трехмерные энергетические спектры в пространстве волновых чисел вычисляются следующим образом [126]:

$$E(\vec{\lambda}_l) = \frac{T}{2} \left(2 \sqrt{(a_l(\vec{\lambda}_l))^2 + (b_l(\vec{\lambda}_l))^2} \right)^2, l = 1, 2, 3 \quad (3.2.1)$$

где $\vec{\lambda}_l = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – пространство волновых чисел, соответствующих направлениям осей, в частности: λ_1 – волновые числа в направлении Ox , λ_2 – в направлении Oy , λ_3 – в направлении Oz , $k \in [1; 100]$. $(a_l(\vec{\lambda}_l))$ и $(b_l(\vec{\lambda}_l))$ это коэффициенты трехмерного преобразования Фурье, которые вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a_1(\vec{\lambda}_l) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^{H_x} \int_0^{H_y} \int_0^{H_z} \{u''(\vec{x}, t)\} \cdot \cos(2\pi \vec{\lambda}_l xyz) dx dy dz \\
 b_1(\vec{\lambda}_l) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^{H_x} \int_0^{H_y} \int_0^{H_z} \{u''(\vec{x}, t)\} \cdot \sin(2\pi \vec{\lambda}_l xyz) dx dy dz \\
 a_2(\vec{\lambda}_l) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^{H_x} \int_0^{H_y} \int_0^{H_z} \{v''(\vec{x}, t)\} \cdot \cos(2\pi \vec{\lambda}_l xyz) dx dy dz \\
 b_2(\vec{\lambda}_l) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^{H_x} \int_0^{H_y} \int_0^{H_z} \{v''(\vec{x}, t)\} \cdot \sin(2\pi \vec{\lambda}_l xyz) dx dy dz \\
 a_3(\vec{\lambda}_l) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^{H_x} \int_0^{H_y} \int_0^{H_z} \{w''(\vec{x}, t)\} \cdot \cos(2\pi \vec{\lambda}_l xyz) dx dy dz \\
 b_3(\vec{\lambda}_l) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^{H_x} \int_0^{H_y} \int_0^{H_z} \{w''(\vec{x}, t)\} \cdot \sin(2\pi \vec{\lambda}_l xyz) dx dy dz
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

В формуле (3.2.2) появляются осредненные по ансамблю флуктуации скорости $\{u''(\vec{x}, t)\}, \{v''(\vec{x}, t)\}, \{w''(\vec{x}, t)\}$, значение которых необходимо вычислить. Для этого используется подход, представленный ниже.

Истинное значение скоростей записывается в следующем виде [5]:

$$V(\vec{x}, t) = \overline{V(\vec{x}, t)}_{RANS} + V'(\vec{x}, t) \tag{3.2.3}$$

$$V(\vec{x}, t) = \langle V(\vec{x}, t) \rangle_{LES} + V''(\vec{x}, t) \tag{3.2.4}$$

где $\overline{V(\vec{x}, t)}_{RANS}$ – осредненная по времени скорость из RANS моделирования, $\langle V(\vec{x}, t) \rangle_{LES}$ – осредненная по пространству скорость из LES моделирования, $V'(\vec{x}, t), V''(\vec{x}, t)$ – поля флуктуаций для RANS и LES, соответственно. Здесь $V = (u, v, w)$, $(x_i) = (x, y, z)$. Вычитая (3.2.3) из (3.2.4) и применяя осреднение по ансамблю к полученной разности, запишется следующее выражение:

$$0 = \overline{\{V(\vec{x}, t)\}}_{RANS} - \{\langle V(\vec{x}, t) \rangle\}_{LES} - \{V''(\vec{x}, t)\} \quad (3.2.5)$$

тогда поле флуктуаций будет вычисляться следующим образом:

$$\{V''(\vec{x}, t)\} = \overline{\{V(\vec{x}, t)\}}_{RANS} - \{\langle V(\vec{x}, t) \rangle\}_{LES} \quad (3.2.6)$$

Подставляя полученные значения флуктуационных скоростей из (3.2.6) в (3.2.2) можно определить коэффициенты преобразования Фурье (3.2.2).

Вычисляемый по формуле (3.2.1) энергетический спектр турбулентности, в общем случае представляет из себя некоторую трехмерную поверхность [126]. В данной работе, для наглядности, трехмерный энергетический спектр представлен в проекции на плоскость осей Oxy согласно следующему соотношению [126]:

$$E(\lambda_1) = \int_0^{\lambda_2} \int_0^{\lambda_3} E(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_2 d\lambda_3 \quad (3.2.7)$$

3.3. Сравнительный анализ результатов численного моделирования с экспериментом.

Параметры поставленной проблемы представлены в таблице 3.3.1. Давление на входе принято постоянным. Размеры вычислительной области: $H_x = 60 \delta_\theta, H_y = 20 \delta_\theta, H_z = 20 \delta_\theta$, на выходе и на внешних границах поставлены граничные условия неотражения (Рис.3.1.1), подробно описанные в работе [118]. Численное моделирование производится с использованием пяти вычислительных сеток: 181x121x121, 221x101x101, 271x101x101, 321x101x101 и 351x101x101 узлов.

Таблица 3.3.1 – Параметры потоков.

M_1	M_2	M_c	U_1/U_2	ρ_1/ρ_2	T_1/T_2	p_1/p_2
1.80	0.51	0.51	0.36	0.64	6.5	1

здесь $M_c = (U_1 - U_c)/a_1, (a_1 U_2 + a_2 U_1)/(a_1 + a_2)$ – конвективное число Маха и U_1, U_2 – скорости верхнего и нижнего потоков, соответственно, и a_1, a_2 – местные скорости звука потоков.

Результаты, полученные посредством численного моделирования турбулентных характеристик и их сравнение с данными эксперимента, представлены на Рис. 3.3.1 – 3.3.3 для сечения $x = 18\delta_\theta$ для пяти вычислительных сеток. Путем серий одномерных численных экспериментов с целью адаптации спектральных граничных условий для случая сверхзвукового течения подобрано предпочтительное количество мод в размере $N = 100$. Для дозвуковых течений в работах [33, 34] используется несколько мод, которых достаточно, чтобы сгенерировать синтетическую турбулентность на входе.

Для того, чтобы выбрать наиболее оптимальную вычислительную сетку, позволяющую получить достоверные результаты, необходимо дополнительно проводить анализ сходимости по сетке. С этой целью, численные эксперименты проводятся с использованием нескольких вычислительных сеток с варьируемым количеством узлов.

На Рис. 3.3.2-3.3.3 представлены графики для турбулентных характеристик, полученные в ходе численных экспериментов с использованием 5 вычислительных сеток: $181 \times 121 \times 121$, $221 \times 101 \times 101$, $271 \times 101 \times 101$, $321 \times 101 \times 101$ и $351 \times 101 \times 101$ узлов, в сравнении с данными эксперимента. Как видно из графиков, вычислительная сетка с наибольшим количеством узлов $351 \times 101 \times 101$ дает результат, практически не отличающийся от сеток с меньшим количеством узлов $221 \times 101 \times 101$, $271 \times 101 \times 101$, $321 \times 101 \times 101$ для продольных и касательных турбулентных напряжений (Рис. 3.3.2, 3.3.3). Тогда как, в случае поперечных турбулентных напряжений (Рис. 3.3.3), результат оказался менее удовлетворительным. Тем не менее, хорошая сходимость результатов по сетке в случае продольных и поперечных турбулентных характеристик позволяет сделать выбор наиболее предпочтительной вычислительной сетки: $271 \times 101 \times 101$ узлов (черная сплошная линия).

Как видно из результатов, расхождение с экспериментом составляет около 5% в случае продольных пульсационных скоростей (Рис. 3.3.1), а в случае поперечных скоростей и рейнольдсовых напряжений, расхождение составляет около 10% (Рис. 3.3.2, 3.3.3). Также наличие пульсационных скоростей, в частности рейнольдсовых напряжений (Рис. 3.3.3), подтверждает тот факт, что используемые граничные условия, способны генерировать анизотропность турбулентности на входе.

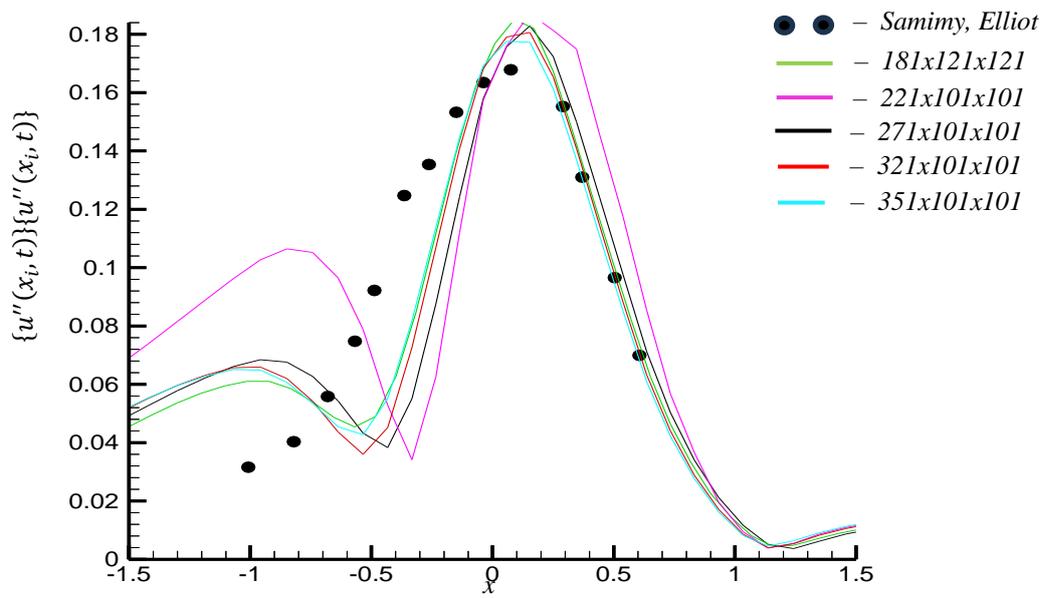


Рис. 3.3.1. Продольные турбулентные напряжения

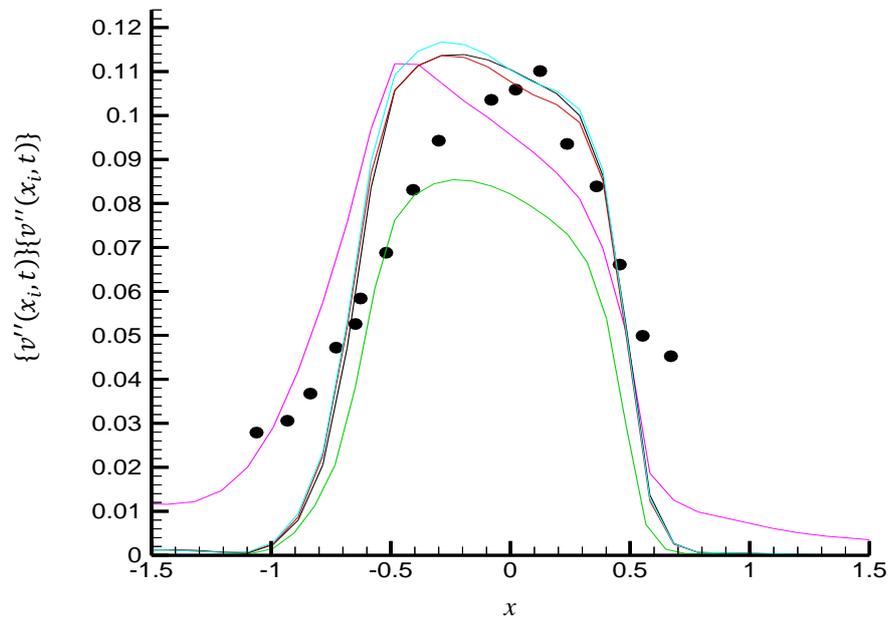


Рис. 3.3.2. Поперечные турбулентные напряжения

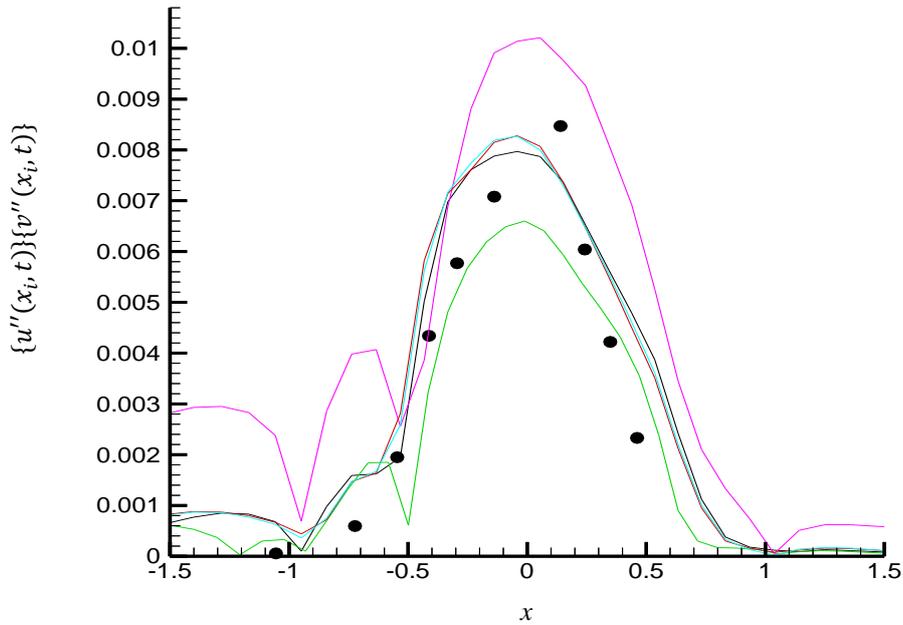


Рис. 3.3.3. Касательные турбулентные напряжения

На Рис. 3.3.4 изображен трехмерный энергетический спектр турбулентности в проекции на плоскость осей Ox (формула (3.2.7)). Значения предельных волновых чисел $\vec{\lambda}_{lcut}$ и $\vec{\lambda}_{le}$, в диапазоне которых находятся основные энергосодержащие масштабы, соответственно равны $\lambda_{1e} = \frac{2\pi}{2H_z} = 0.63$ и $\lambda_{1cut} = \frac{2\pi}{\Delta x} = 26.18$ для выбранной вычислительной сетки и заданной области.

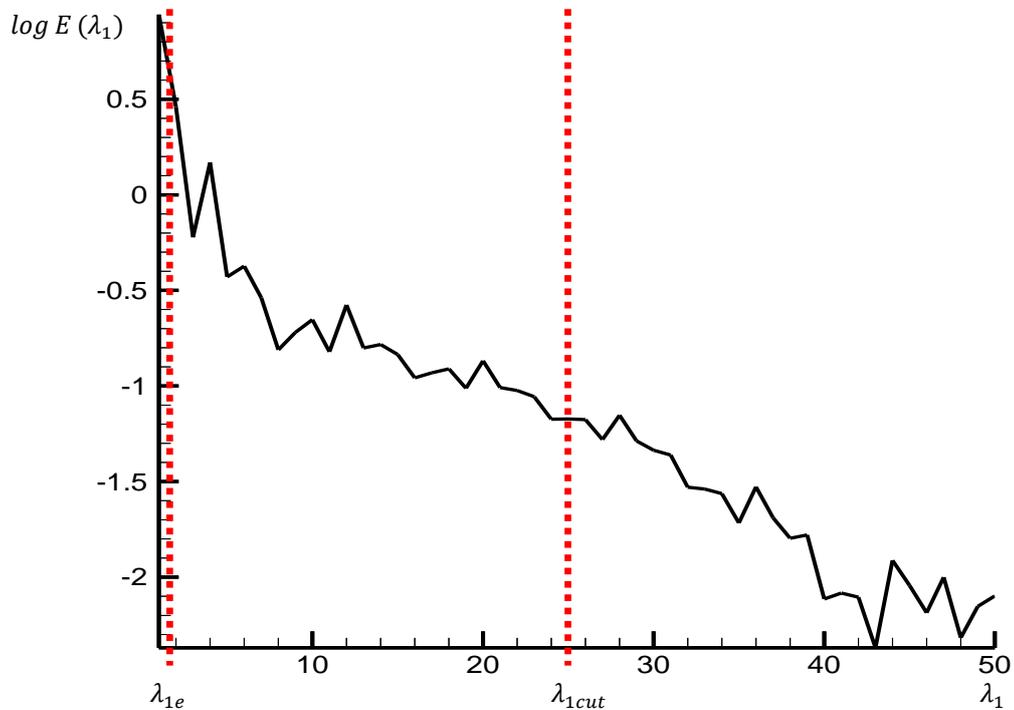


Рис. 3.3.4. Трехмерный энергетический спектр в проекции

Из Рис. 3.3.4 видно, что полученные в ходе численных экспериментов результаты находятся в диапазоне волновых чисел λ_{1e} и λ_{1cut} , захватывая больший диапазон энергосодержащих вихрей.

3.4. Выводы.

1. Сформулирована численная модель на примере проблемы истечения трехмерного сверхзвукового слоя смещения. Поставлены и адаптированы для сверхзвукового течения спектральные граничные условия на входе, генерирующие анизотропность турбулентности.

2. Проведен анализ сходимости по сетке по результатам для осредненных турбулентных пульсационных характеристик, вследствие чего выбрана наиболее оптимальная вычислительная сетка, состоящая из $271 \times 101 \times 101$ узлов.

3. Получены процентные соотношения расхождения полученных данных с экспериментом на примере корреляционных турбулентных характеристик и выявлено удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными.

4. Вычислен график трехмерного энергетического спектра, демонстрирующий основной диапазон разрешаемых энергетических вихрей

4 ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ВЫСОКОСКОРОСТНАЯ ТУРБУЛЕНТНАЯ СТРУЯ В СПУТНОМ ПОТОКЕ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ.

Одной из центральных задач при проектировании камер сгорания является достижение улучшения смешения топлива и окислителя. Его можно достичь путем пассивного и активного воздействия. Пассивное воздействие подразумевает под собой различные уступы и каверны перед вдуваемой струей, либо уступы на верхних стенках камеры сгорания, а к активному воздействию относится введение детерминистического возмущения на входе, которое реализуется акустическим воздействием, либо наложением периодических колебаний на срезе сопла на закрылках клапанов. Пассивные способы требуют конструктивных изменений геометрии камер сгорания, что приводит к трудностям их эксплуатации и увеличению стоимости таких камер сгорания. По этой причине активным способам улучшения смешения уделяется особое внимание в настоящий момент, поскольку этот метод не требует изменений в геометрии камеры сгорания.

Как показал анализ работ, проведенных в главе 1.3, метод улучшения смешения топлива с окислителем посредством введения дополнительного возмущения, достаточно хорошо изучен в дозвуковых и околозвуковых течениях, однако для сверхзвуковых течений проблема остается малоизученной и актуальной.

В этой главе представлено численное моделирование истечения сверхзвуковой турбулентной струи совершенного газа с дополнительными детерминистическими возмущениями в сверхзвуковой спутный поток.

4.1. Постановка задачи сверхзвуковой струи в спутном высокоскоростном потоке с дополнительными усилениями

Целью исследования является детальный анализ структуры смешения сверхзвуковой струи со спутным потоком при различных способах задания детерминистических возмущений на входе. Для достижения цели сформулированы две проблемы: проблема 1 – Истечение естественной турбулентной струи в спутный сверхзвуковой поток; проблема 2 – Истечение возмущенной турбулентной струи в спутный сверхзвуковой поток. Схема течения представлена на Рис. 4.1.1:

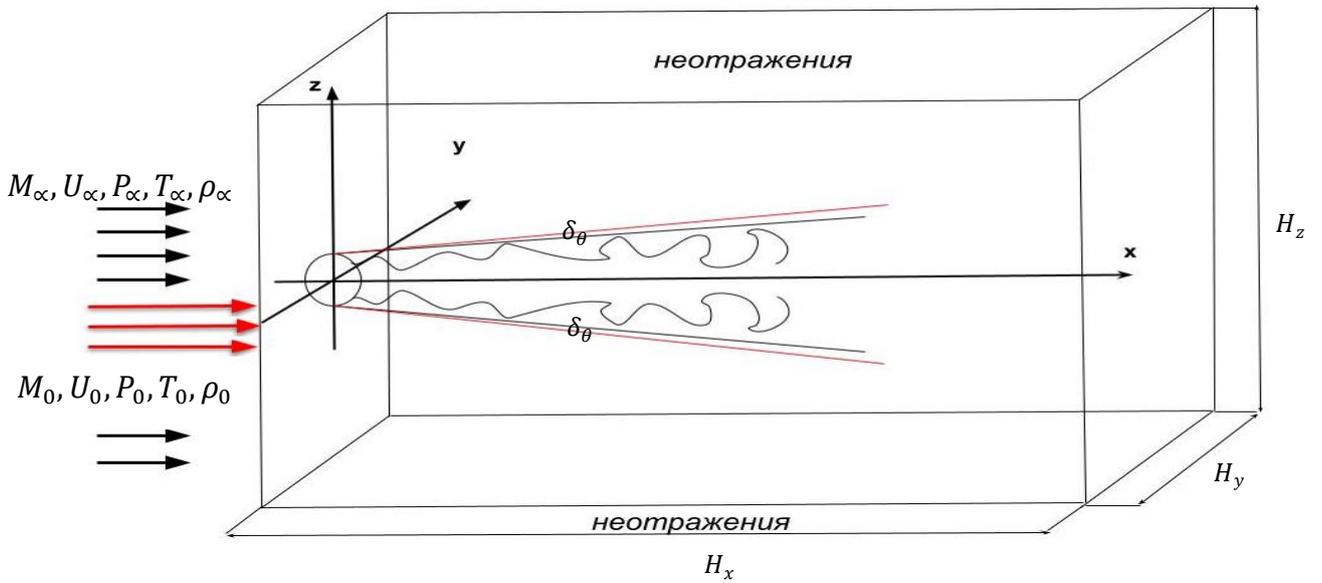


Рис. 4.1.1. Схема течения.

В проблеме 1 генерируется анизотропная турбулентность, близкая к реальной. Проблема 2 формируется с исследования влияния активного воздействия на смешение струи со спутным потоком.

Поставленные проблемы описываются системой трехмерных уравнений Навье-Стокса для совершенного вязкого газа, осредненных по пространству и замкнутых моделью Смагоринского (2.1.21 – 2.1.24).

Параметры потока и струи на входе задаются следующим образом:

$$\text{поток: } u = M_\infty \sqrt{\frac{\gamma_\infty R T_\infty}{W_\infty}} = u_\infty, v = v_\infty, w = w_\infty, p = p_\infty, T = T_\infty$$

$$\text{струя: } u = M_0 \sqrt{\frac{\gamma_0 R T_0}{W_0}} = u_0, v = v_0, w = w_0, p = p_0, T = T_0$$

На месте перехода потока в струю вышеуказанные параметры определяются функцией гиперболического тангенса (3.1.3).

Как показывают результаты численного моделирования, проведенного в предыдущей главе, для проблемы истечения трехмерного слоя смешения, спектральные граничные условия (3.1.4-3.1.6) являются надежным инструментом, способным генерировать анизотропную турбулентность, близкую к реальной. Основываясь на этом, в этой главе для заданной проблемы истечения сверхзвуковой турбулентной струи в спутный поток также приняты граничные условия (3.1.4 – 3.1.6):

$$\vec{V}(x_i, t) = \vec{V}(x_i)^{base} + \vec{V}(x_i, t)^{natural} \quad (4.1.1)$$

$$\vec{V}(x_i, t)^{natural} = Q \sum_{n=1}^N \sqrt{q^n} [\cos(k^n \cdot d \cdot x_i + \phi_n)] \quad (4.1.2)$$

$$\vec{V}(x_i)^{base} = \begin{cases} u_\infty = 1, v_\infty = 0, w_\infty = 0 - \text{струя} \\ \text{для } x = 0, 0 \leq y \leq H_y, 0 \leq z \leq H_z \\ u_0 = \sqrt{T_0} \frac{M_0}{M_\infty}, v_0 = 0, w_0 = 0, -\text{поток} \\ \text{для } x = 0, |z^2 + y^2| \leq R \end{cases} \quad (4.1.4)$$

R – радиус отверстия, через которое дувается струя.

На выходной, нижней и верхней границах задаются граничные условия неотражения [118, 119].

Для постановки граничных условий в проблеме 2, к формуле (4.1.1) добавляется поле скоростей $\vec{V}(x_i, t)^{forced}$, которое представляет собой дополнительные детерминистические возмущения, вводимые с целью активного воздействия на струю. Тогда новые граничные условия для проблемы 2 принимают следующий вид:

$$\vec{V}(x_i, t) = \vec{V}(x_i)^{base} + \vec{V}(x_i, t)^{natural} + \vec{V}(x_i, t)^{forced} \quad (4.1.6)$$

где:

$$\vec{V}(x_i, t)^{forced} = \begin{cases} G(z)(A \sin(\omega \cdot t) + C \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t)) & (a) \\ G(z) \cdot (B \cos(\omega \cdot t) + C \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t)) & (b) \end{cases} \quad (4.1.7)$$

здесь $G(z)$ – функция Гаусса $G(z) = \exp(-z^2/2\delta_\theta^2)$, A , B и C – амплитуды возмущений, ω – частота возмущения, определяемая из экспериментов или с использованием линейной теории стабильности [127, 128].

Здесь, как и в проблеме 1, на выходе и на внешних границах поставлены граничные условия неотражения [118, 119].

Ниже приведены результаты численного моделирования двух проблем с параметрами из таблицы 4.1.1:

Таблица 4.4.1 – Параметры проблемы 1 и проблемы 2.

Проблема	M_0	M_∞	T_0	T_∞	Re
1	2	1	3.8	1	10^5
2	2	1	3.8	1	10^5

Давление $P = 1$ принято постоянным (расчетный режим истечения), длина, ширина и высота безразмерной вычислительной области: $H_x = 250 \delta_\theta$, $H_y = 50 \delta_\theta$, $H_z = 50 \delta_\theta$ соответственно, $d = 6\delta_\theta$ – диаметр струи, $y_0 = 25 \delta_\theta$,

$z_0 = 25 \delta_\theta$ – координаты центра струи. Вычислительная сетка состоит из $271 \times 101 \times 101$ узлов.

4.2. Анализ численных результатов влияния вариации дополнительного детерминистического возмущения на характеристики слоя смешения.

Результаты численного моделирования проблемы вдува сверхзвуковой естественной струи и сверхзвуковой возмущенной струи в спутный сверхзвуковой поток представлены на Рис. 4.2.1-4.2.8 для различных параметров.

Так, например, динамику образования вихревых структур, формирующихся в слое смешения в различные моменты времени, можно оценить на Рис. 4.2.1, посредством представленной эволюции мгновенных изолиний завихренности в сечении $y=25 \delta_\theta$ в плоскости осей Oxz для проблемы 1. Из графиков видно, что в момент времени $t=400$ на расстоянии $x=130 \delta_\theta$ слой смешения начинает искривляться (Рис. 4.2.1 б), с дальнейшим формированием пары вихрей в момент времени $t=500$ на расстоянии $x=160 \delta_\theta$ (Рис. 4.2.1 в). Сформированная пара вихрей движется вниз по течению и в момент времени $t=600$ на расстоянии $x=180 \delta_\theta$ происходит процесс свертки смежных вихрей с последующим формированием более крупных (Рис. 4.2.1 г), при этом заметно небольшое расширение зоны смешения начиная с сечения $x=160 \delta_\theta$ (Рис. 4.2.1 в). К моменту времени $t=2000$ (Рис. 4.2.1 д) зона смешения струи и потока окончательно расширяется. Количественная картина вихреобразования подтверждается также качественно на Рис. 4.2.2, где представлены мгновенные изоповерхности плотностей.

Полученные результаты демонстрируют применимость спектральных граничных условий (4.1.1 – 4.1.4) для получения анизотропной турбулентности, близкой к реальной. При этом необходимо отметить, что вихреобразование происходит на достаточно большом расстоянии от начала расчетной области.

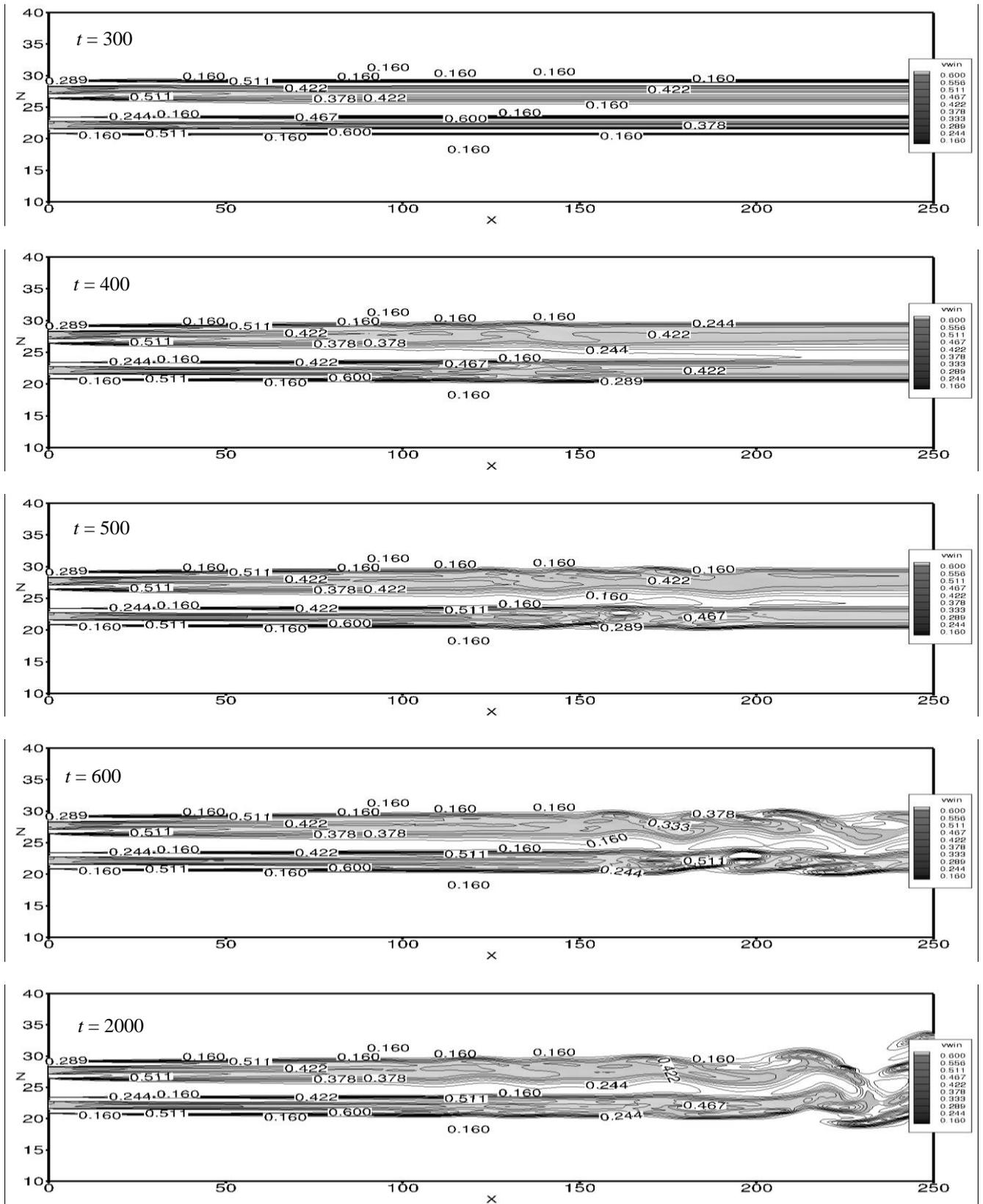


Рис. 4.2.1. Эволюция мгновенных изолиний завихренности в различные моменты времени в сечении, нормальном к y (проблема 1)

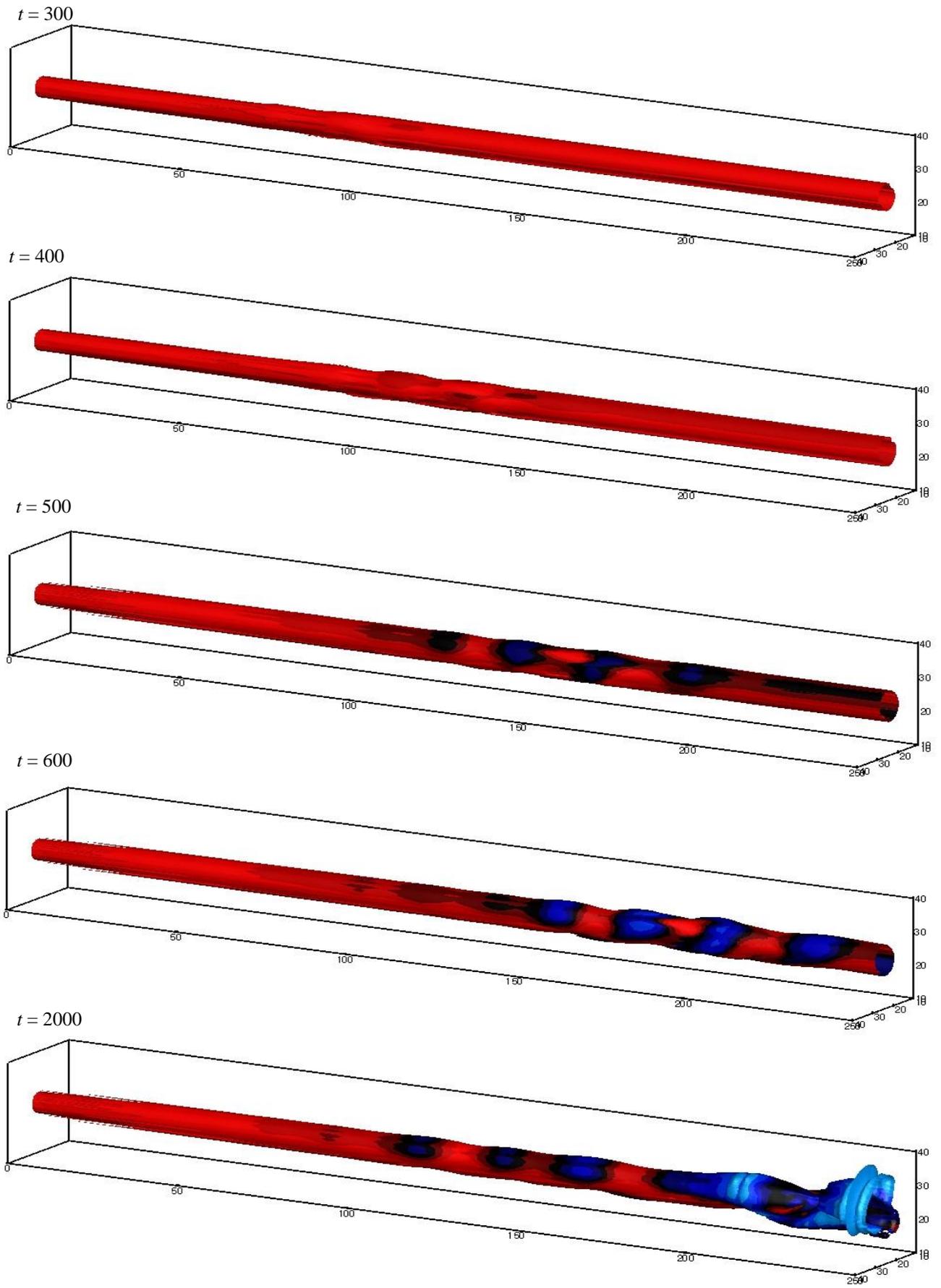


Рис. 4.2.2. Эволюция пространственных изоповерхностей плотности в различные моменты времени (проблема 1)

Далее представлены результаты, полученные при численном моделировании для поставленной проблемы 2 – Истечение турбулентной струи с дополнительными усилениями. Также проводится сравнительный анализ с результатами проблемы 1.

На Рис. 4.2.3 приведена картина формирования нестационарной вихревой системы для струи с дополнительными возмущениями. Круговая частота усиления равна $\omega = \frac{2\pi}{12}$. Процессы эволюции вихреобразования для натуральной естественной струи (Рис. 4.2.1), и для струи с дополнительными возмущениями схожи, однако здесь начало образования вихревых структур происходит гораздо выше по потоку и в более ранний момент времени. Так, например, на Рис. 4.2.3(а) видно, что в случае проблемы 2 уже в момент времени $t=300$ заметно искривление слоя смещения на расстоянии $x=75 \delta_\theta$, что, в сравнении с натуральной струей (проблема 1), гораздо раньше. Процесс формирования пары вихрей также происходит в более ранний момент времени $t = 400$ и на более близком расстоянии $x = 125 \delta_\theta$ (Рис. 4.2.3 б) по сравнению с проблемой 1, и уже к моменту времени $t = 500$ (Рис. 4.2.3 в) происходит слияние пары вихрей с формированием более крупных. В момент времени $t = 600$ (Рис. 4.2.3 г) возникает развитое турбулентное течение, картина которого сохраняется к моменту времени $t=2000$. Характер вихреобразования для струи с дополнительными возмущениями также подтверждается пространственной эволюцией изоповерхностей плотностей, изображенной на Рис. 4.2.4, где по сравнению с результатами, полученными для естественной натуральной струи, также видно образование крупных когерентных структур в более ранний момент времени и на близком расстоянии.

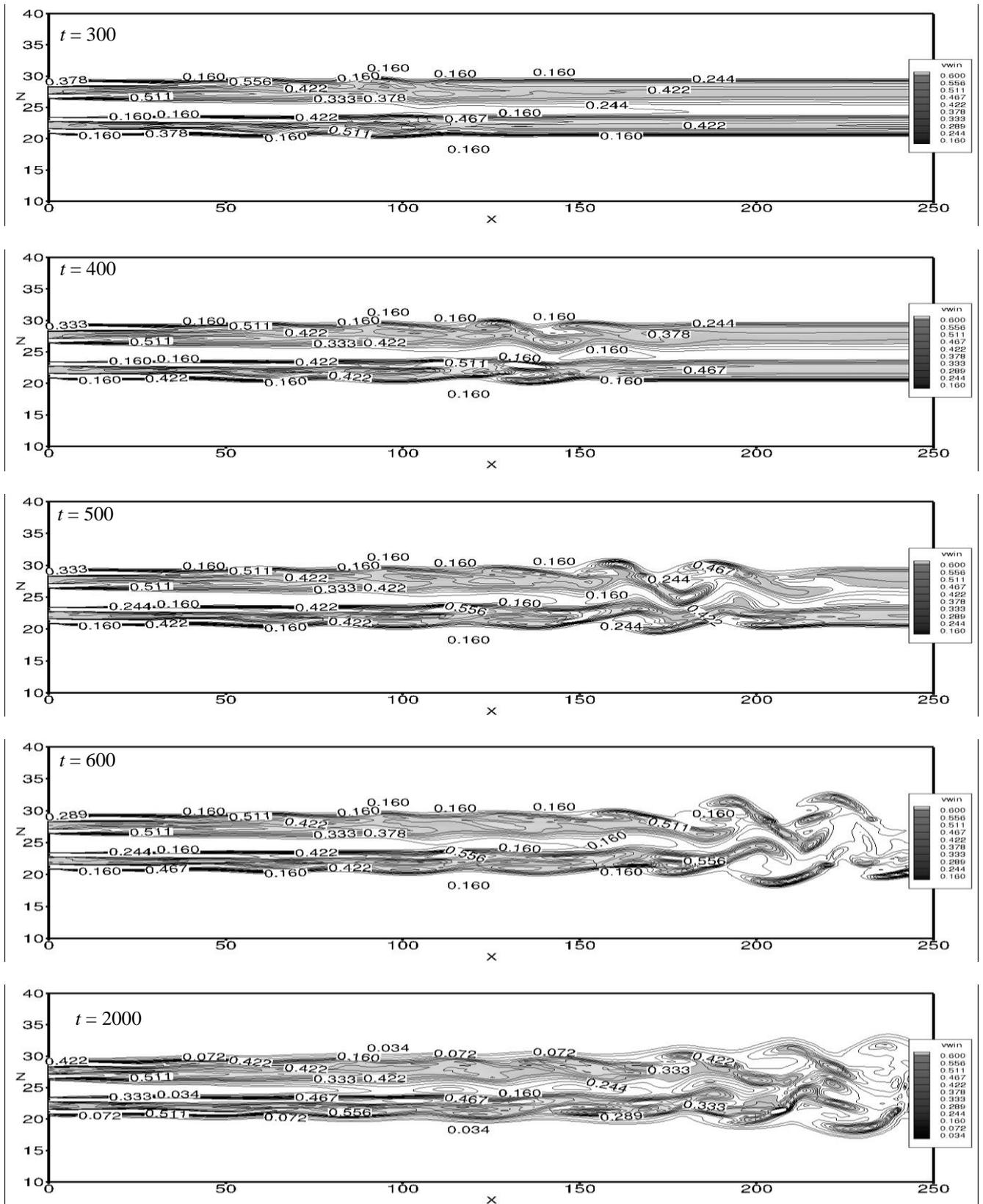


Рис. 4.2.3. Эволюция мгновенных изолиний завихренности в различные моменты времени в сечении, нормальном к y (проблема 2)

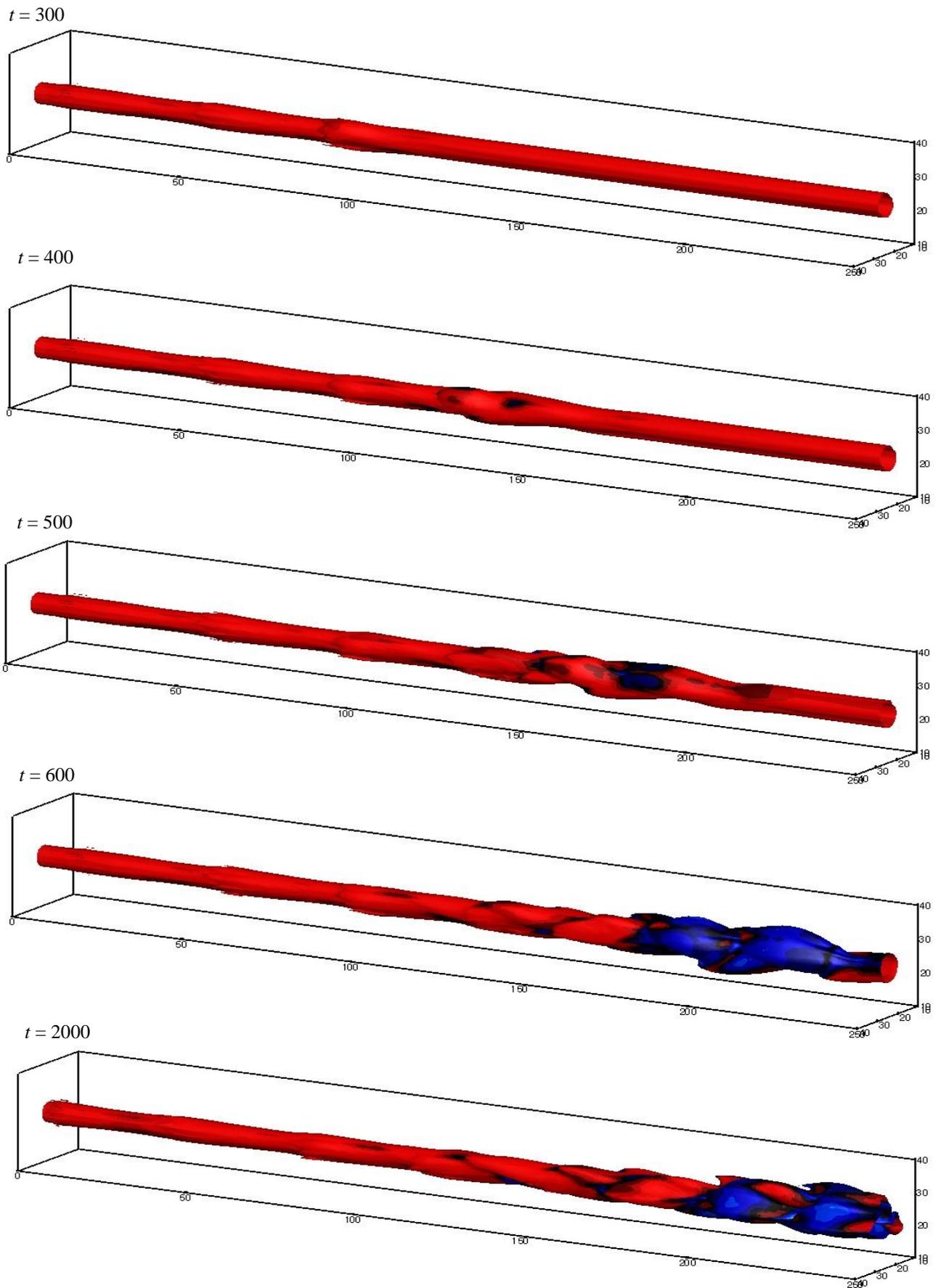


Рис. 4.2.4. Эволюция пространственных изоповерхностей плотности в различные моменты времени (проблема 2)

Одной из количественных характеристик, демонстрирующих изменение интенсивности смешения, является параметр толщины завихренности:

$$\delta_{\omega} = \frac{u_{\infty} - u_0}{(\partial u / \partial z)_{max}}$$

где градиенты скорости $(\partial u / \partial z)_{max}$ определены из мгновенных значений скорости. В результатах приведены графики этого параметра для каждого рассмотренного случая поставленной проблемы, показывающие, как изменяется интенсивность смешения вниз по потоку. Так, на Рис. 4.2.5 приведены графики для δ_{ω} и результаты подтверждают, что, для струи с дополнительными усилениями (проблема 2), рост слоя смешения начинается гораздо раньше, чем для естественной натуральной струи (проблема 1). В случае с возмущенной струей уже с сечения $x=60 \delta_{\theta}$ видно проявление возникновения турбулентности, когда как для естественной струи явная турбулентность возникает только начиная с сечения $x=180 \delta_{\theta}$, а ниже по потоку результат, полученный для проблемы 2 и вовсе демонстрирует значительный рост толщины завихренности δ_{ω} в 2.5 раз.

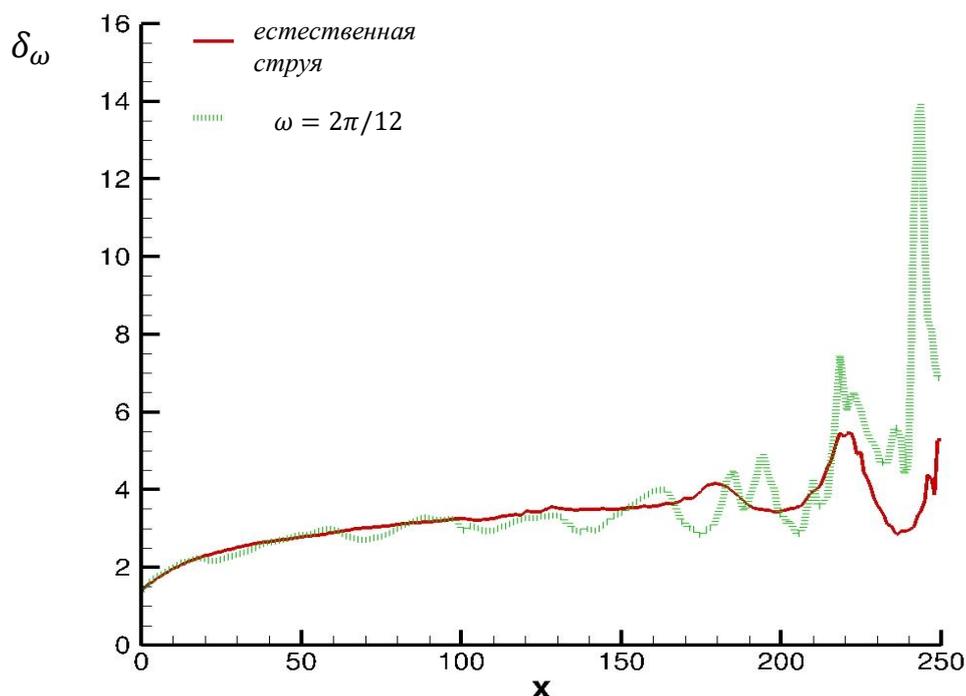
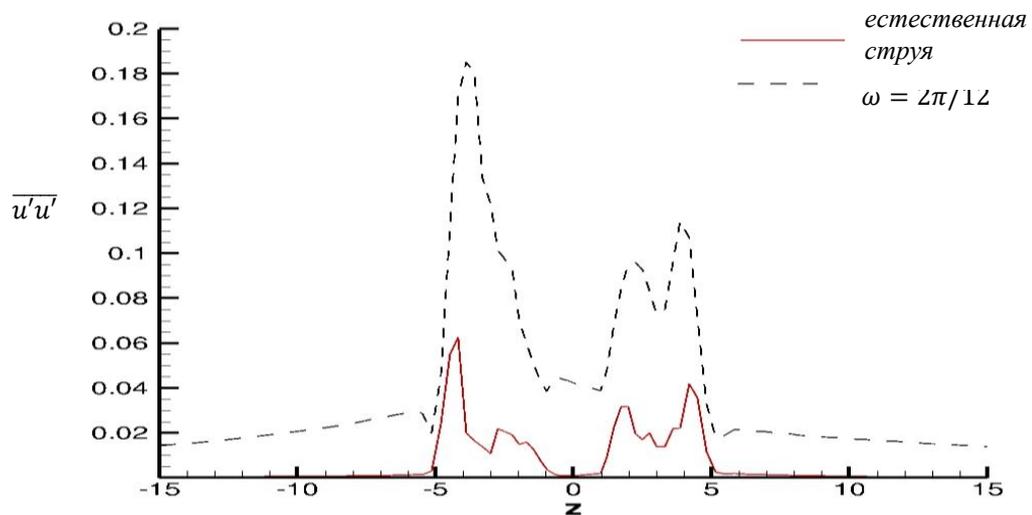


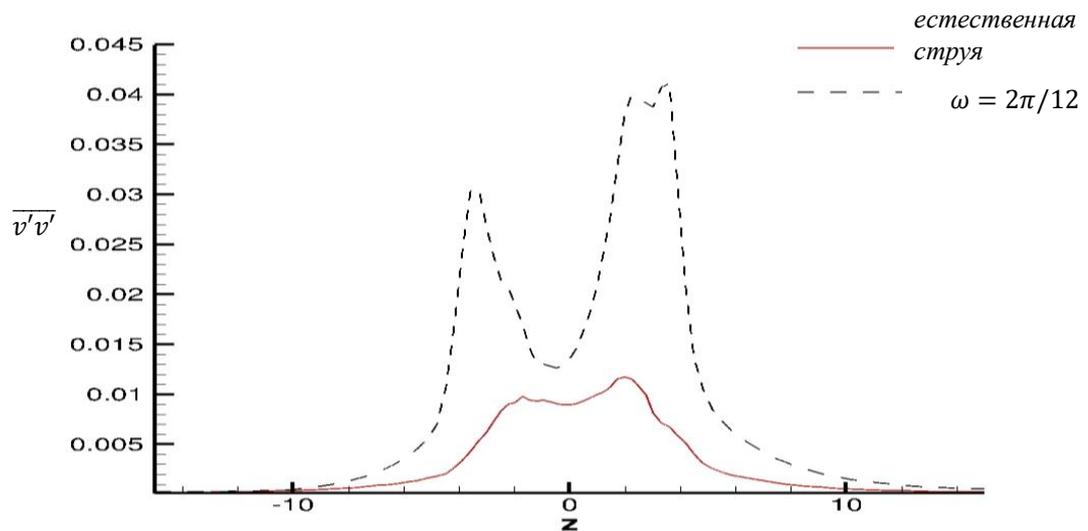
Рис. 4.2.5. Толщина завихренности для проблемы 1 и для проблемы 2 с частотой дополнительного усиления $\omega = 2\pi/12$

Ниже на Рис. 4.2.6 представлены турбулентные касательные напряжения продольные (а), поперечные (б) и касательные (в) в сечении $z = 25 \delta_{\theta}$ для естественной струи (проблема 1) и для струи с дополнительными возмущениями (проблема 2). Полученные результаты для проблемы 2 принимают значения во много раз выше, по сравнению с результатами для

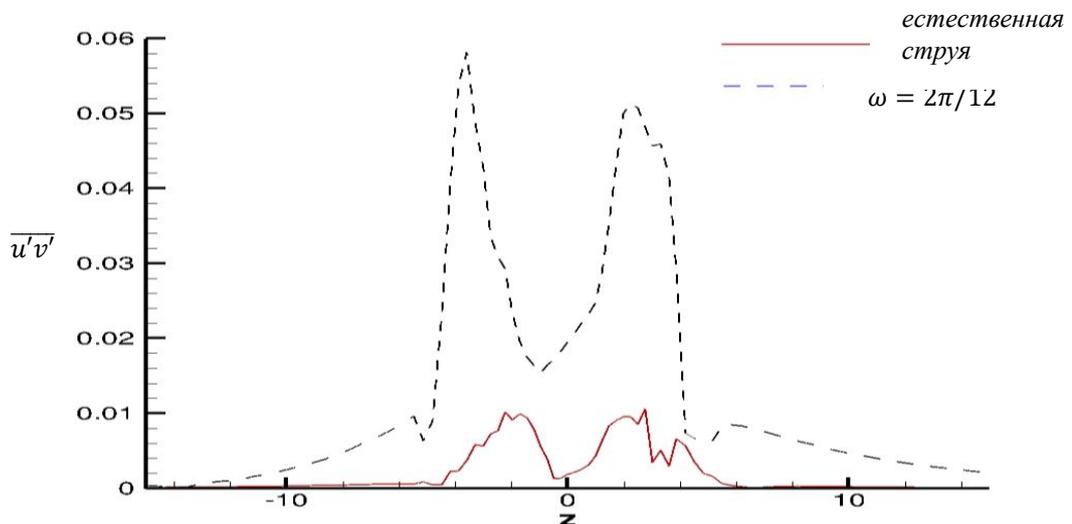
проблемы 1, тем самым демонстрируя возникновение более интенсивной турбулентности. Особенно это заметно на графиках касательных турбулентных напряжений (Рис. 4.2.6 в).



а) продольные турбулентные напряжения



б) поперечные турбулентные напряжения



в) касательные турбулентные напряжения

Рис. 4.2.6. Тензора напряжения в сечении

Спектры амплитуд профилей скоростей, заданных на входе, для двух проблем, продемонстрированы на Рис. 4.2.7 – 4.2.8 в различные моменты времени: $0 < t < 2000$ (Рис. 4.2.7 – 4.2.8 (а)) и $0 < t < 100$ (Рис. 4.2.7 – 4.2.8 (б)).

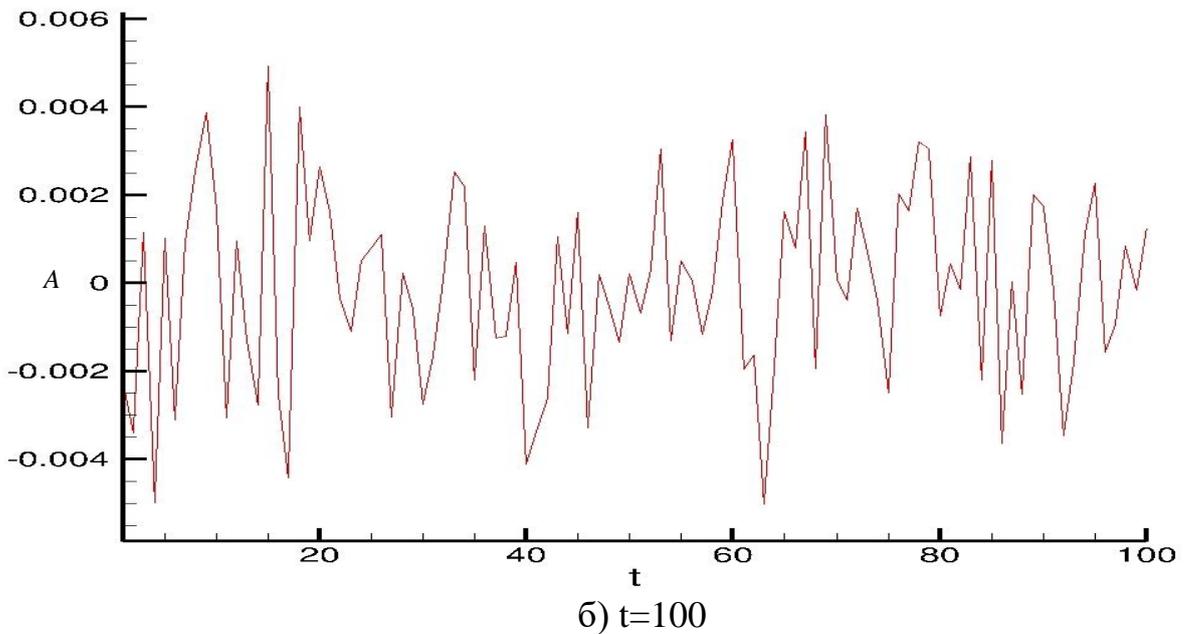
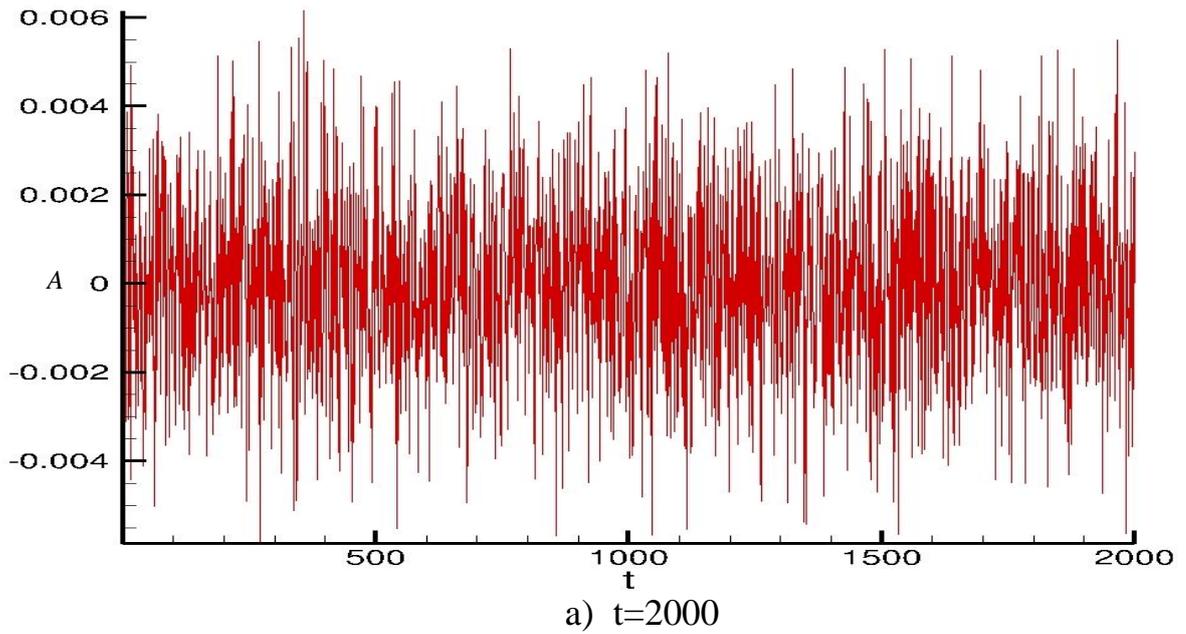


Рис. 4.2.7. Спектр по начальным входным параметрам для проблемы 1

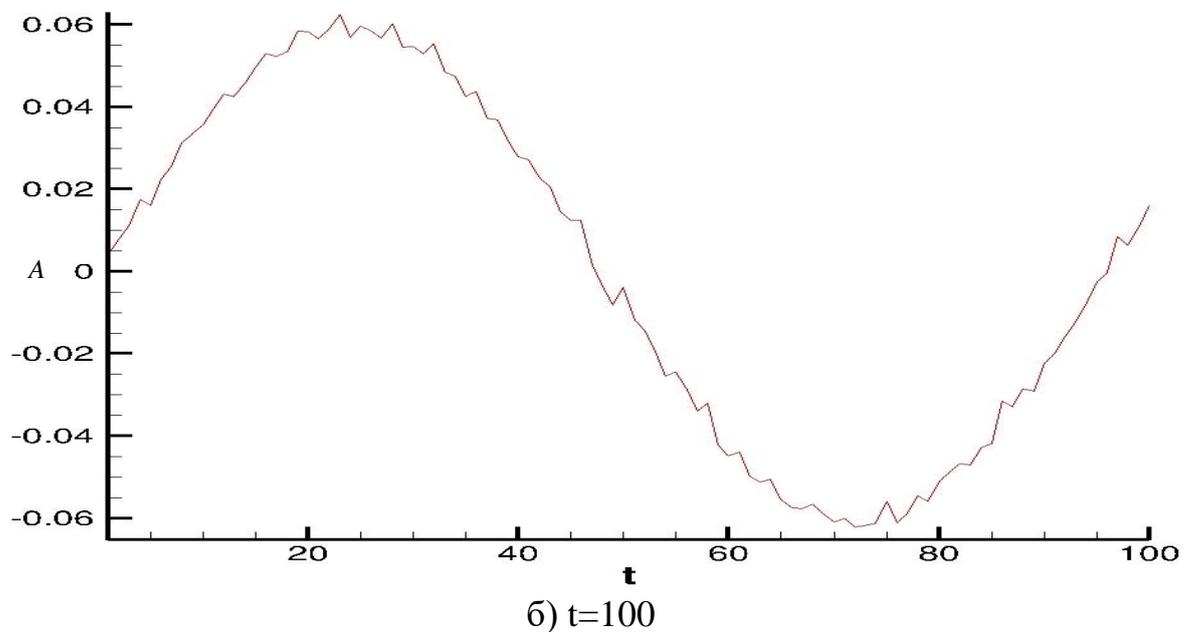
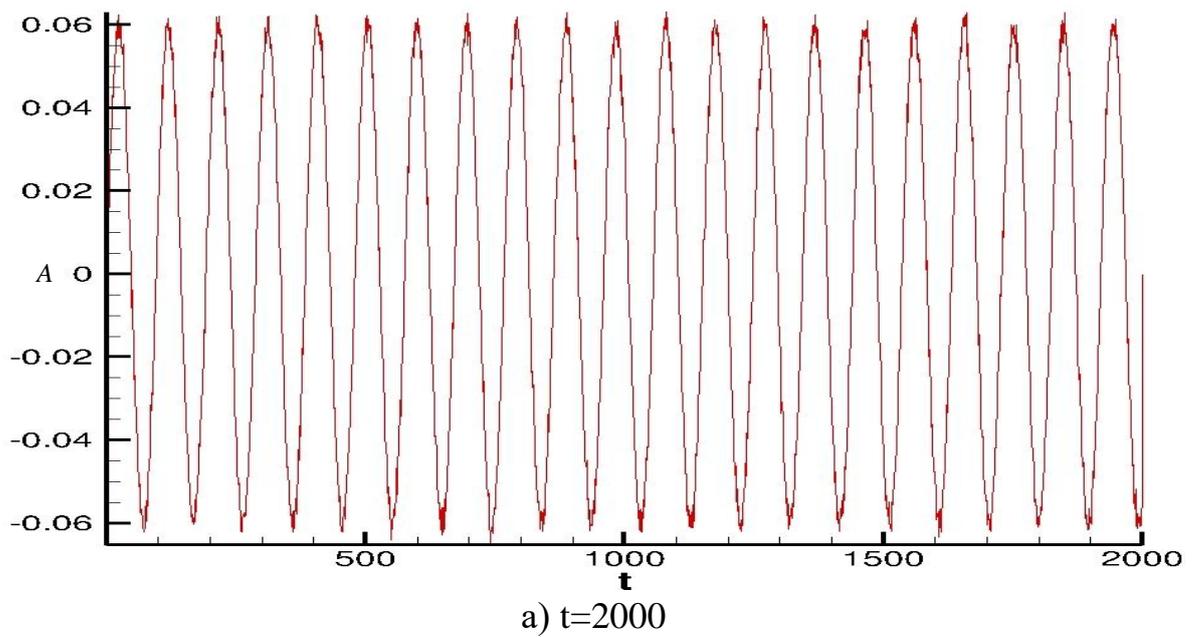


Рис. 4.2.8. Спектр по начальным входным параметрам для проблемы 2

По графикам спектров поперечных скоростей (Рис. 4.2.7-4.2.8) можно сделать вывод, что налагаемое детерминистическое возмущение приводит к возрастанию скоростей в поперечных направлениях, и, в свою очередь, растет с течением времени вниз по потоку на поперечной составляющей скорости, попадает в фазу естественного возмущения, что приводит к еще большему усилению возмущения.

Резюмируя полученные результаты, можно сделать вывод, что введение дополнительного детерминистического возмущения на вдуве струи способствует более раннему и интенсивному росту зоны смешения, что в свою очередь приводит к улучшению качества смешения.

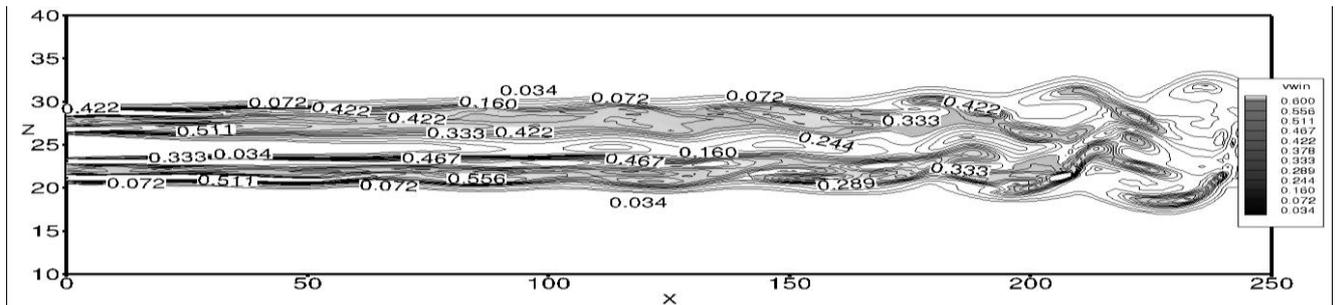
Далее проводится анализ влияния частоты и амплитуды дополнительного возмущения в диапазоне, представленном в таблице 4.2.2, на динамику изменения вихреобразования и рост зоны смешения струи с потоком. Результаты представлены на Рис. 4.2.9-4.2.12.

Таблица 4.2.2 – Диапазоны частот и амплитуд дополнительного усиления.

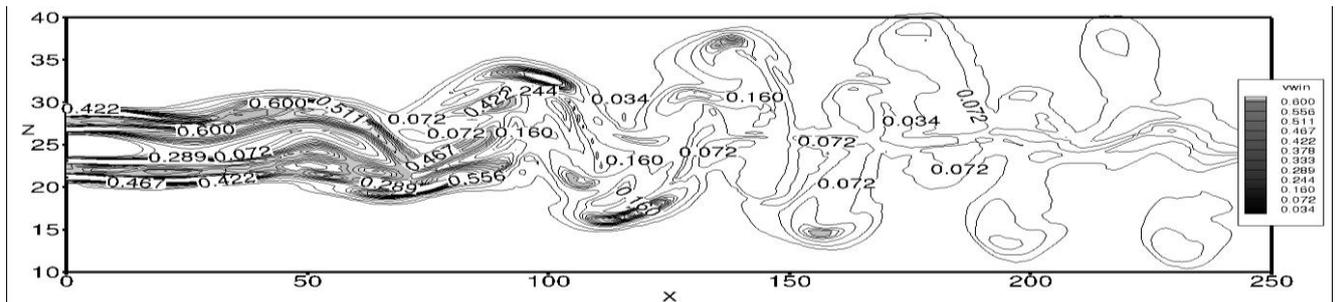
Вариант	Частота ω	Амплитуда $A=B$
1	$\frac{2\pi}{12}$	0.06
2	$\frac{2\pi}{18}$	0.06
3	$\frac{2\pi}{24}$	0.06
4	$\frac{2\pi}{24}$	0.03
5	$\frac{2\pi}{24}$	0.06
6	$\frac{2\pi}{24}$	0.1

На Рис. 4.2.9 показаны изолинии завихренности для возмущенной струи в плоскости симметрии с вариацией частот дополнительного усиления. Для продольной составляющей скорости используется граничное условие (4.1.2 а) с параметрами $A = 0.06$, $C = 0$; для поперечных скоростей используется условие (4.1.2 б) с параметрами $B = 0.06$, $C = 0$. Сравнивая все варианты, можно увидеть, что результаты, полученные для $\omega = \frac{2\pi}{12}$ (вариант 1) отличаются от результатов для двух других вариантов частот (варианты 2-3), а именно тем, что формирующиеся вихри имеют меньший размер, при этом их количество больше. Так, в случае варианта 1, наблюдается 6 вихрей, по сравнению с с вариантом 2 ($\omega = \frac{2\pi}{18}$) и вариантом 3 ($\omega = \frac{2\pi}{24}$), где в заданной области формируется только 5 вихрей. Также графики демонстрируют, что уменьшение частоты (варианты 2, 3) детерминистического возмущения приводит к более быстрому слиянию вихрей и, как следствие, увеличению их размеров (Рис. 4.2.9 (б, в)). Это поведение также подтверждается картинками мгновенных изоповерхностей плотностей на Рис. 4.2.10, из которых видно, что вариация частоты неоднородно влияет на рост и слияние вихрей. Можно сделать следующий вывод, что уменьшение частоты возмущения приводит к значительному росту ширины зоны смешения: вихри получают крупного

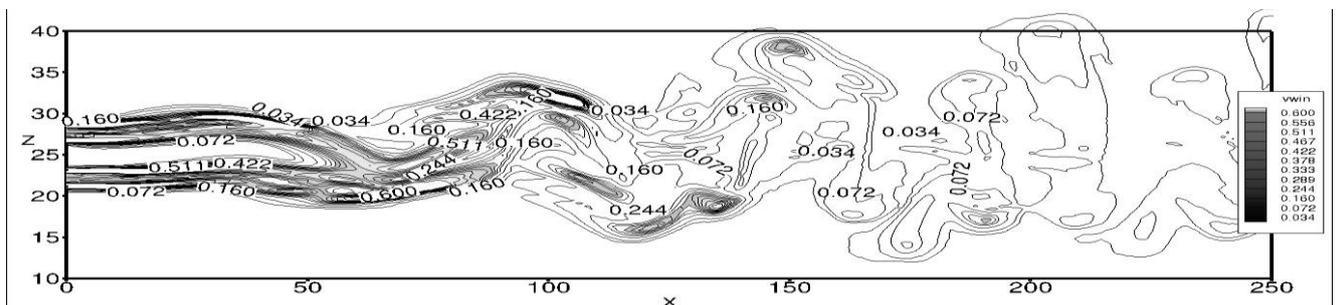
размера, процесс слияния пары вихрей происходит быстрее, однако их количество уменьшается.



а) струя с частотой дополнительных усилений $\omega = 2\pi/12$ (вариант 1)

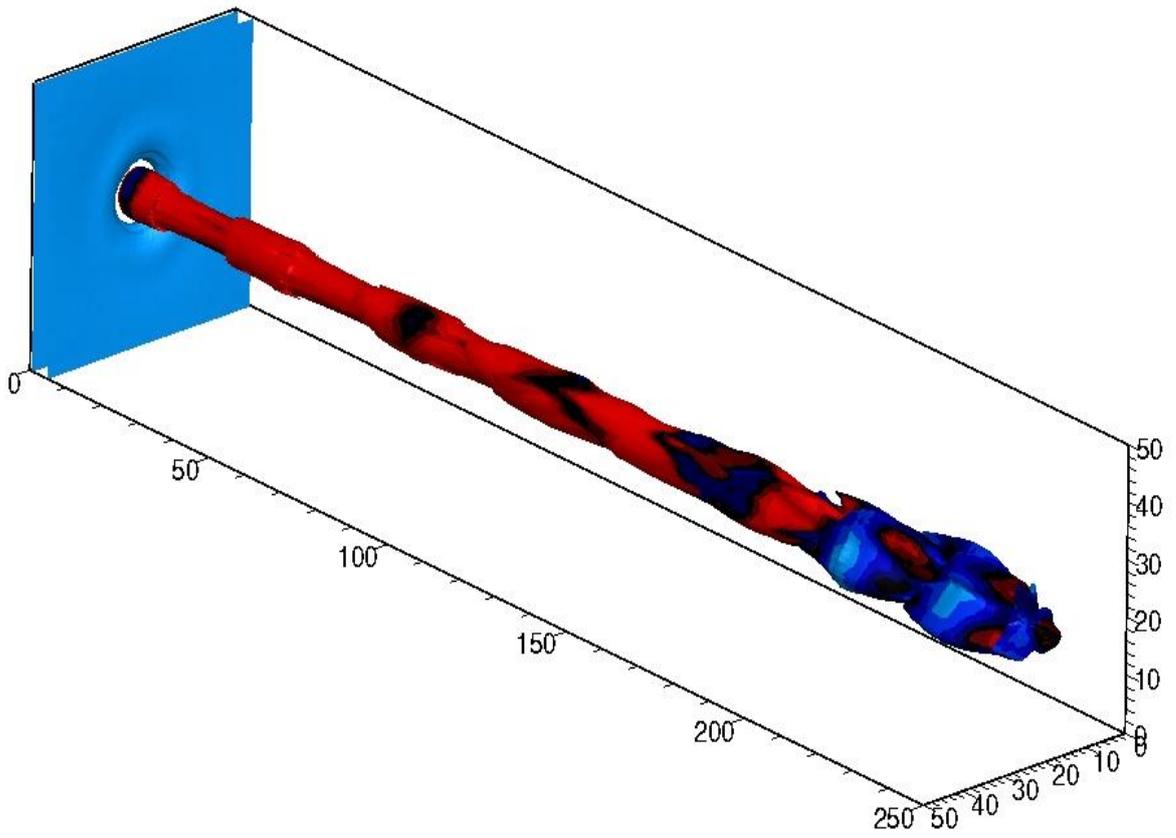


б) струя с частотой дополнительных усилений $\omega = 2\pi/18$ (вариант 2)

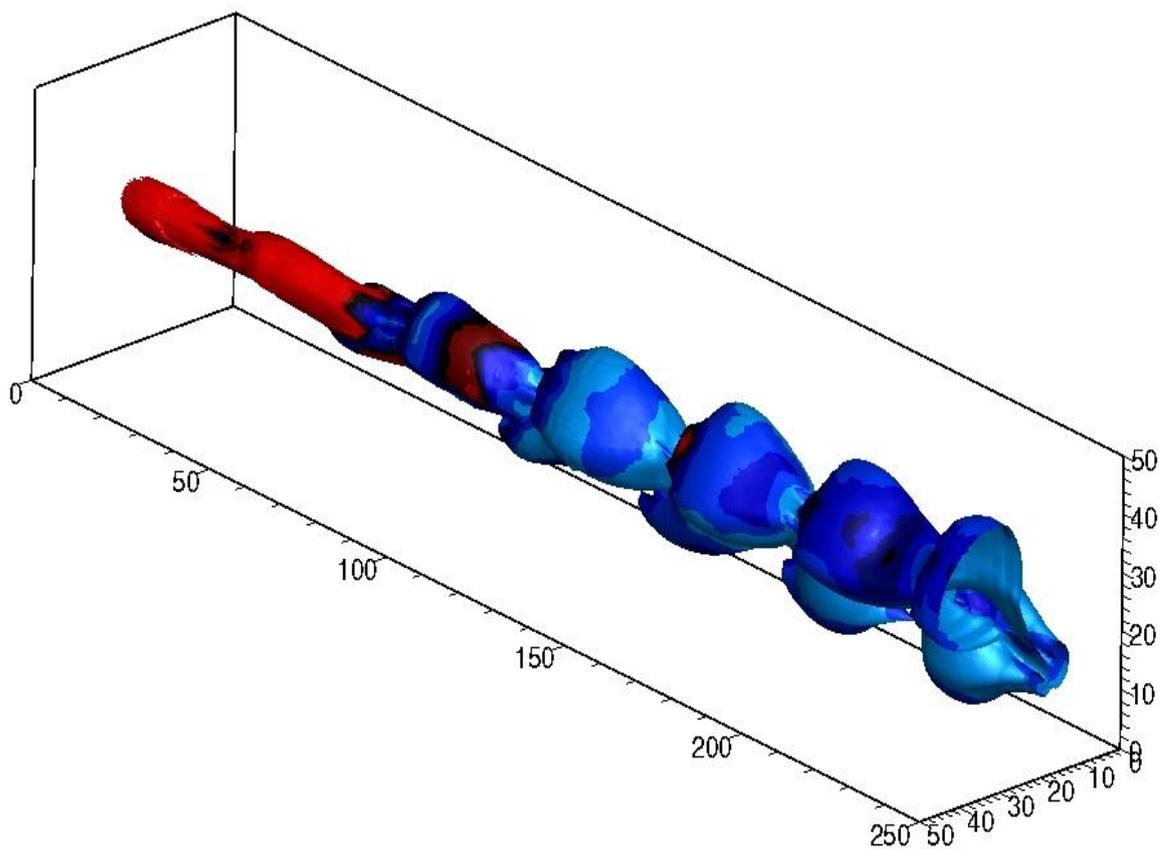


в) струя с частотой дополнительных усилений $\omega = 2\pi/24$ (вариант 3)

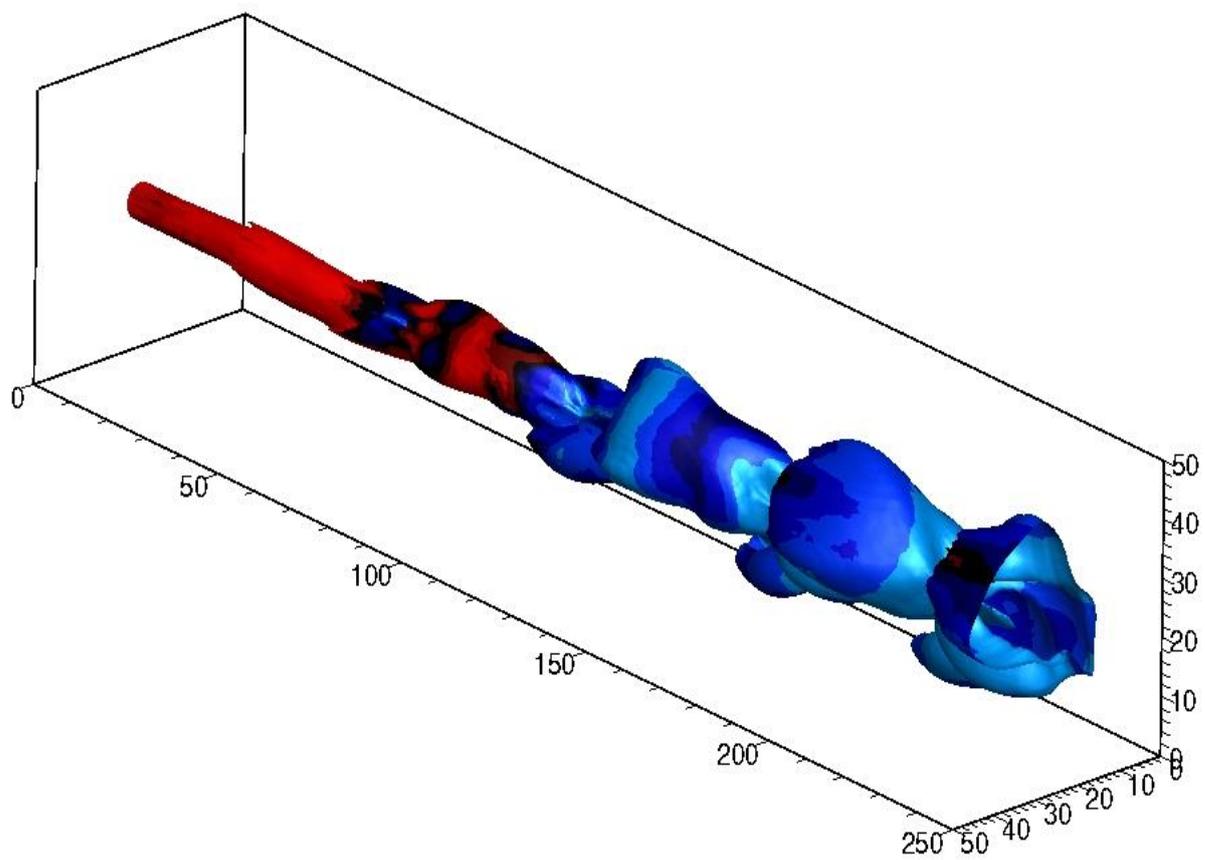
Рис. 4.2.9. Изолинии завихренности в плоскости симметрии, нормальной к y



а) струя с частотой дополнительных усилений $\omega = 2\pi/12$ (вариант 1)



б) струя с частотой дополнительных усилений $\omega = 2\pi/18$ (Вариант 2)



в) струя с частотой дополнительных усилений $\omega = 2\pi/24$ (Вариант 3)

Рис. 4.2.10. Мгновенные изоповерхности плотностей

Графики толщины завихренности δ_ω , представленные на Рис. 4.2.11, демонстрируют рост слоя смешения с уменьшением значения частоты. Так, например, для варианта 3 с частотой дополнительного возмущения $\omega = \frac{2\pi}{24}$, толщина завихренности δ_ω принимает наибольшие значения в сечении $x=170\delta_\theta$, а вниз по потоку значения падают. Тем не менее большая переменяемость полученных значений, обусловленная сильным растягиванием вихрей в поперечном направлении в случае меньших частот, может быть опасной, поскольку при реализации процесса горения это может привести к быстрому затуханию. Теоретическое изучение влияние частотных характеристик активного воздействия на формирование слоя смешения очень важно с практической точки зрения, поскольку посредством частот реализуется акустическое воздействие.

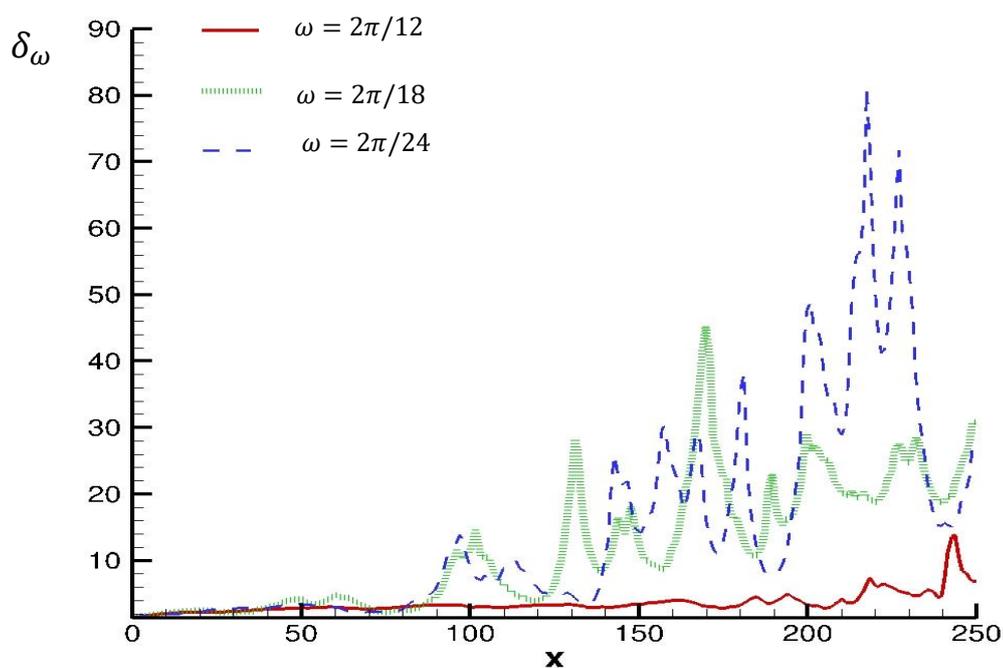


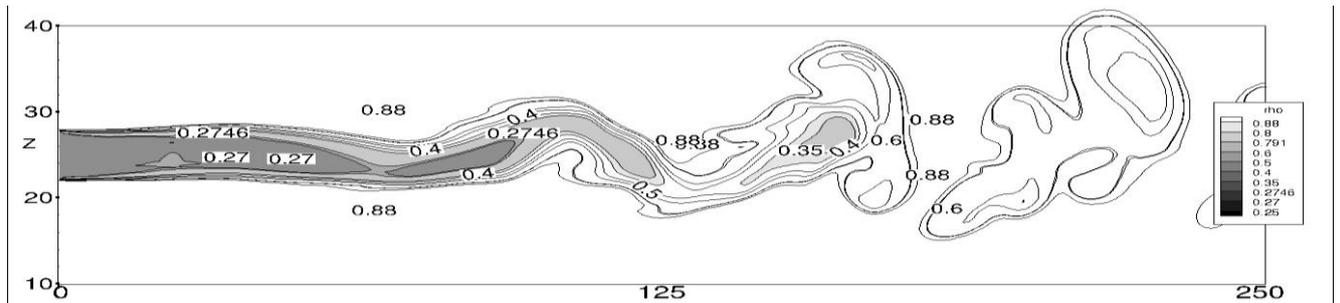
Рис. 4.2.11. Толщина завихренности для вариации частоты дополнительных усилений

Для более детального изучения влияния дополнительных возмущений на зону смешения струи с потоком, также проведен амплитудный анализ детерминистических возмущений. Расчеты проводятся с выбранной частотой дополнительных усилений $\omega = \frac{2\pi}{24}$ в диапазоне амплитуд: $0.03 < A < 0.1$ (варианты 4-6).

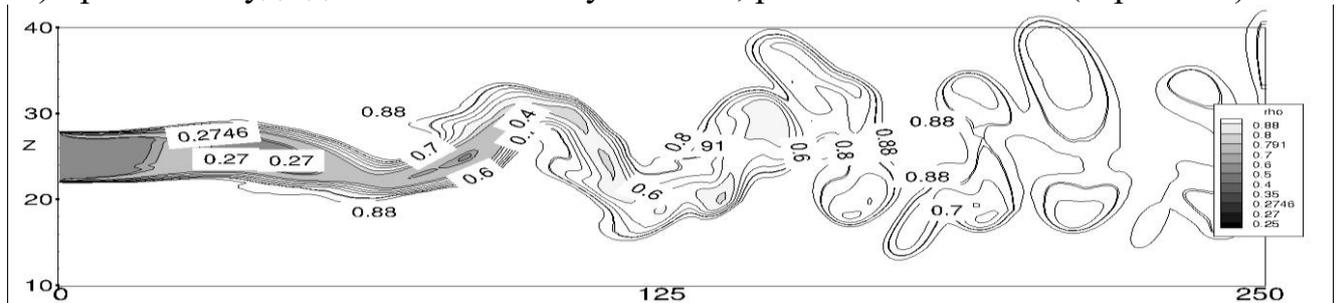
На Рис. 4.2.12 – 4.2.13 приведены изолинии плотности в плоскости симметрии и распределение толщины завихренности. Как видно из графиков

изолиний плотностей, с увеличением амплитуды дополнительного возмущения, увеличивается и количество образованных крупных вихрей: вариант 4 ($A = 0.03$) – 6 вихрей, вариант 5 ($A = 0.06$) – 7 вихрей, вариант 6 ($A = 0.1$) – 8 вихрей. Исходя из этого можно сделать вывод, что увеличение амплитуды дополнительного усиления ускоряет процесс формирования и слияния пары вихрей в более крупные когерентные структуры.

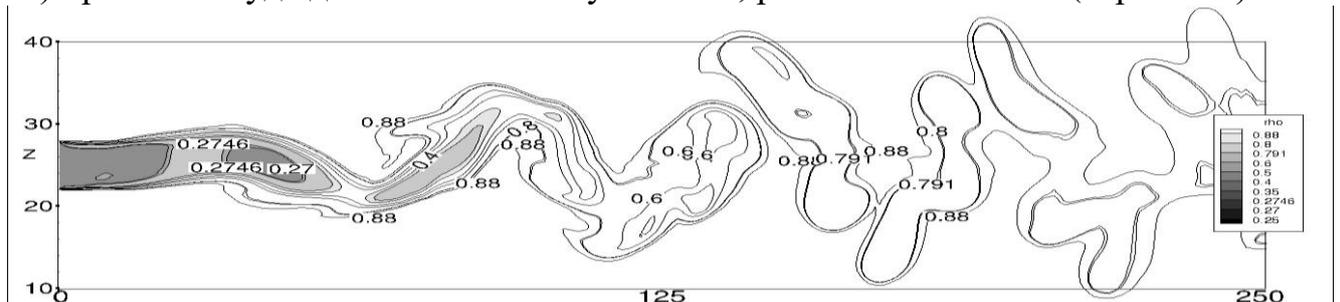
Тем не менее по результатам для толщины завихренности на Рис. 4.2.13 видно, что наилучшие показатели были получены для варианта 5 с амплитудой дополнительного усиления $A = 0.06$, при котором максимальное значение толщины завихренности равно $\delta_\omega = 84 \delta_\theta$, что выше результатов для варианта 4 на $18\delta_\theta$ и для варианта 6 – на $10\delta_\theta$. Исходя из этого можно резюмировать, что слишком сильное увеличение амплитуды дополнительного возмущения приводит к торможению процесса образования вихрей и увеличивает их растяжение в поперечном направлении, что и объясняет тот факт, что для варианта 6 ($A = 0.1$) толщина завихренности принимает меньшие значения, по сравнению с вариантом 5 ($A = 0.6$).



а) при амплитуде дополнительных усилений, равной $A=B = 0.03$ (вариант 4)



б) при амплитуде дополнительных усилений, равной $A = B = 0.06$ (вариант 5)



в) при амплитуде дополнительных усилений, равной $A=B = 0.1$ (вариант 5)

Рис. 4.2.12. Изолинии плотности в плоскости симметрии, нормальной к y для струи с частотой дополнительных усилений $\omega = 2\pi/24$

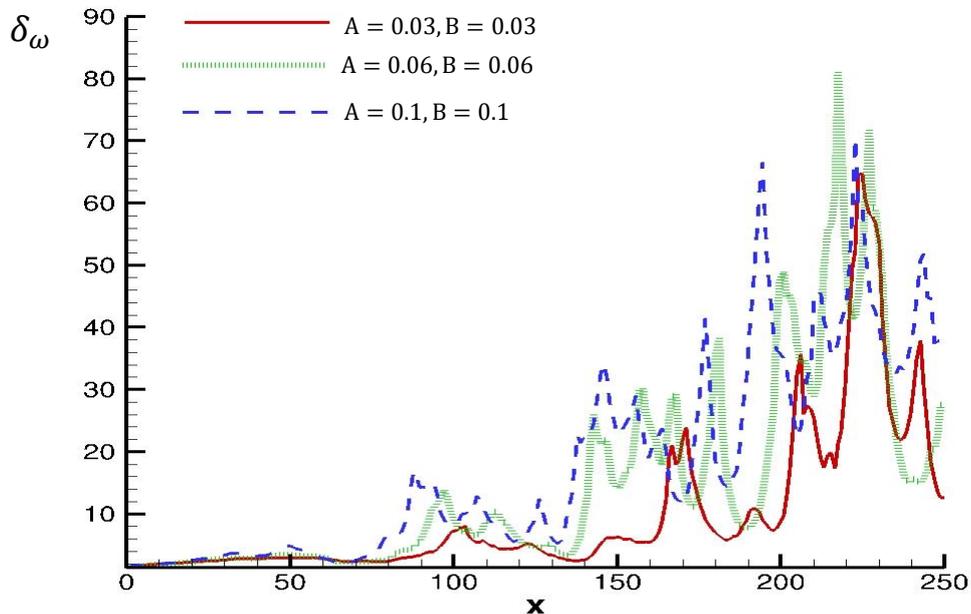


Рис. 4.2.12. Толщина завихренности для вариации амплитуды дополнительных усилений

Необходимо отметить, что на один численный эксперимент с использованием вычислительной сетки, состоящей из $271 \times 101 \times 101$ узлов (или 2 764 471 узлов), и на имеющейся вычислительной технике, затрачивается примерно 24 часа.

Все численные эксперименты производятся на компьютерах, оперируемых Linux и имеющих следующие характеристики: RAM 64 GB, Intel core i9-13700.

4.3. Выводы.

Резюмируя полученные результаты для поставленной задачи истечения сверхзвуковой струи совершенного газа в спутном потоке с дополнительными усилениями, были сделаны следующие выводы:

1. Осуществлена постановка детерминистических граничных условий, генерирующих дополнительные усиления на вдуваемой струе.

2. На основе разработанной модели детально изучены закономерности образования турбулентных когерентных структур для расчетного режима вдува круглой сверхзвуковой струи в спутный сверхзвуковой поток.

3. Установлено, что введение дополнительного детерминистического возмущения способствует раннему росту ширины зоны смешения, а также в более близких ко входному сечениях, что, в свою очередь, приводит к выводу о том, что интенсивность смешения возрастает.

4. Выявлено влияние частотного и амплитудного дополнительного возмущения на рост и формирование слоя смешения, а именно: увеличение

частоты налагаемого дополнительного усиления приводит к раннему формированию вихрей и увеличению их в размере, а увеличение амплитуды вызывает значительные колебания слоя смещения вследствие растягивания крупных когерентных структур в поперечном направлении.

5 СИСТЕМА НЕДОРАСШИРЕННЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СТРУЙ В СПУТНОМ ПОТОКЕ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСИЛЕНИЯМИ.

Для достижения полноты сгорания топлива в камерах сгорания ПВРД необходимо увеличение скорости смешения топливно-окислительной смеси. В реальных камерах сгорания помимо смешения струи топлива с набегающим воздухом также образовывается сложная ударно-волновая структура, поскольку имеет место большой перепад давлений струй и потока. Ударные волны или скачки уплотнения также могут влиять на скорость и полноту смешения топлива, именно поэтому необходимо при моделировании таких течений также учитывать и их влияние.

В предыдущей главе численно изучена проблема истечения сверхзвуковой струи с дополнительными возмущениями в высокоскоростной спутный поток при расчетном режиме. В случае расчетного режима струя, истекающая в поток, имеет на срезе сопла то же давление, что и окружающая среда (изобарическая струя). При таком истечении струи возникают лишь слабые волны разрежения, а скачки уплотнения отсутствуют [129]. Однако, близкое к реальному течение должно учитывать также разность давлений на срезе сопла, из которого инжектируется струя, и окружающей среды (нерасчетный режим истечения). При истечении газа из сопла в нерасчетном режиме образуются неизобарические струи. В отличие от изобарических, для которых характерно постоянство давления во всем поле течения, в неизобарических струях давление может существенно изменяться как по длине струи, так и поперек, что приводит к сложному течению с областями расширения и сжатия [129-135]. В соответствии с принятой терминологией, нерасчетность истечения характеризуется степенью нерасчетности $n = \frac{p_0}{p_\infty}$. При этом для $n < 1$ струя называется перерасширенной, а для $n > 1$ – недорасширенной. Таким образом, в этой главе исследуется нерасчетный режим истечения сверхзвуковой недорасширенной струи с дополнительными детерминистическими возмущениями в сверхзвуковой спутный поток. Особенности рассматриваемого течения является значительный перепад плотности и давления на срезе сопла к периферии струи и, соответственно, существенное изменение геометрических масштабов струи. Другой особенностью является влияние детерминистических возмущений на распределение термодинамических характеристик, включая взаимодействие ударной волны с возмущенной струей в слое смешения.

5.1. Постановка задачи.

В данной главе численно моделируется проблема истечения системы пространственных сверхзвуковых неизобарических турбулентных струй из круглых сопел (Рис. 5.1.1) в спутный сверхзвуковой поток. Параметры на входе задаются по аналогии с проблемой, приведенной в главе 4.

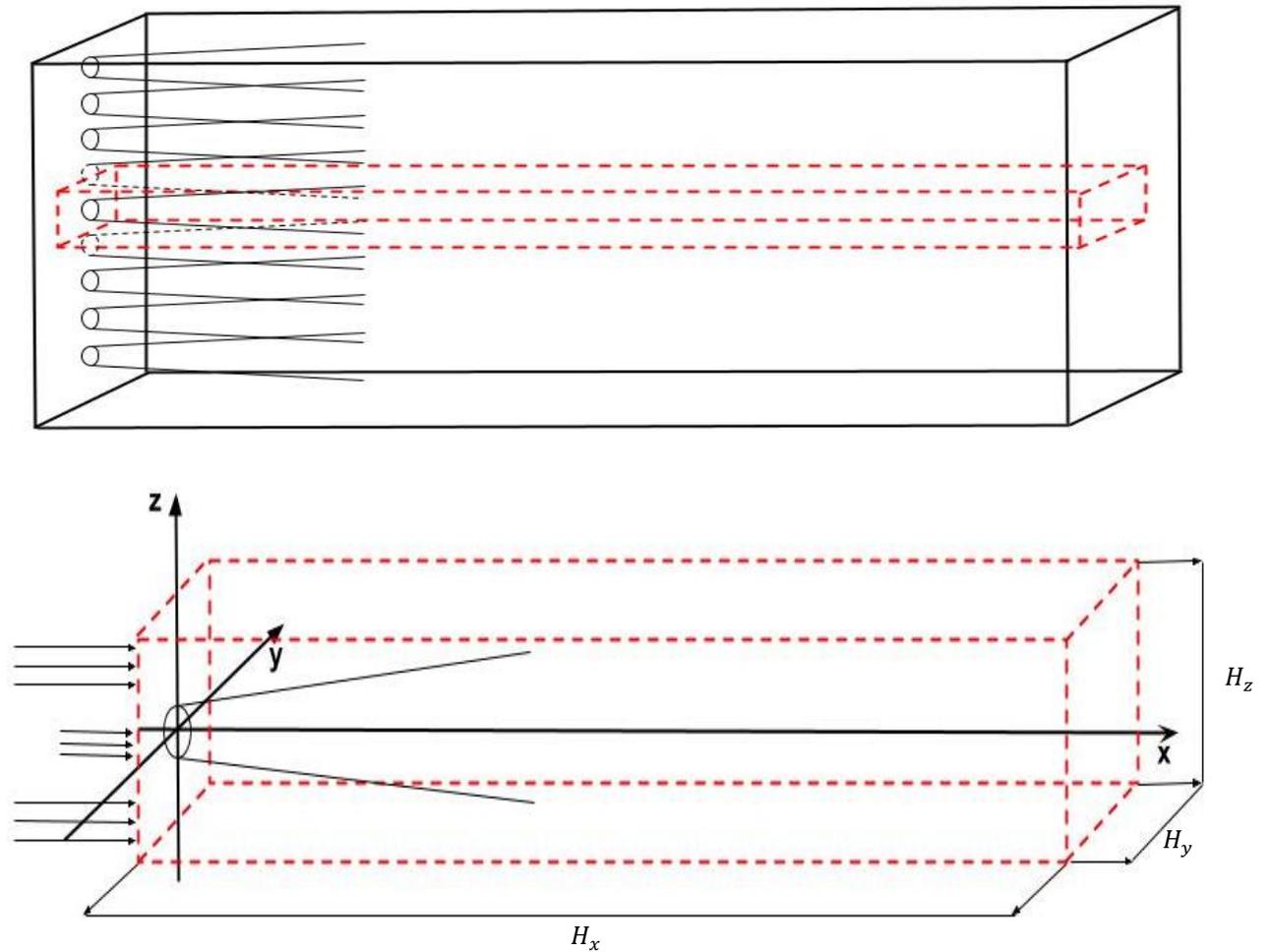


Рис. 5.1.1. Схема течения и расчетная область

Отличием здесь является то, что проблема формируется при двух постановках (Рис. 5.1.1 – 5.1.2):

- Постановка 1. Система сверхзвуковых недорасширенных турбулентных струй в сверхзвуковом спутном потоке (Рис. 5.1.2а).
- Постановка 2. Одиночная недорасширенная турбулентная сверхзвуковая струя в сверхзвуковом спутном потоке (Рис. 5.1.2 б).

Постановка 1 подразумевает собой систему множества периодически повторяющихся недорасширенных струй в спутном потоке в неограниченной области. Струи и поток, а также ударно-волновая структура симметричны между собой по вертикали.

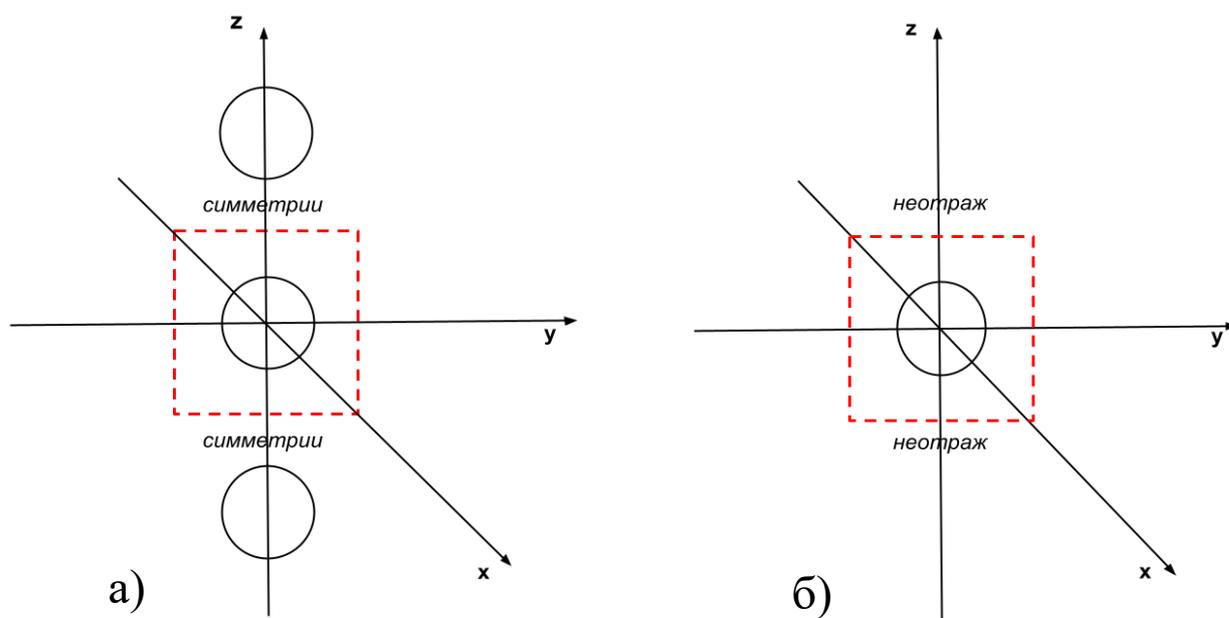


Рис. 5.1.2. Постановки 1 и 2.

Если рассмотреть систему из трех параллельных по вертикали недорасширенных струй, то в силу условий симметрии, ударно-волновая структура, возникающая вследствие взаимодействия струй со спутным потоком, является идентичной для всех трех струй.

Это утверждение дает право выделить расчетную область, отмеченную пунктиром на Рис. 5.1.1, которая ограничена плоскостями симметрии струи и потока. Таким образом, решение проблемы в постановке 1 в выделенной области, осуществляется заменой отброшенной части условиями симметрии на верхней и нижней границе, боковые граничные условия моделируют свободный поток.

При постановке 2 влияние соседних струй на срединную струю отсутствует, поэтому моделируются условия неотражения на всех границах. Поставленная проблема описывается системой трехмерных отфильтрованных по LES уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного совершенного газа (2.1.21–2.1.24) с граничными условиями, соответствующими струе с дополнительными детерминистическими возмущениями (4.1.6 – 4.1.7).

Таким образом для расчетной области (выделена красным пунктиром на Рис. 5.1.1) на выходной, нижней и верхней границах задаются граничные условия двух типов (в зависимости от выбранной постановки):

а) симметрии, где поток газа и пертурбации проходят границу и отражаются от нее (постановка 1).

б) неотражения, где поток газа и пертурбации проходят границу, не отражаясь от нее (постановка 2).

5.2. Анализ результатов.

Численное моделирование поставленной проблемы взаимодействия сверхзвуковых недорасширенных струй со сверхзвуковым спутным потоком производится в диапазоне следующих параметров:

- Нерасчетность: $2 < n < 12$;
- Дополнительное силовое воздействие: $0.01 < A = B < 0.03$;
- Число Маха: $4 < M_\infty < 6$, $2 < M_0 < 4$.

Величины безразмерной вычислительной области имеют следующие значения: $H_x = 100\delta_\theta$ – длина, $H_y = 13\delta_\theta$ – высота, $H_z = 13\delta_\theta$ – ширина, диаметр струй $d = 3\delta_\theta$. Вычислительная сетка состоит из $271 \times 151 \times 151$ узлов.

Ниже представлены результаты численного моделирования для поставленной проблемы (Постановка 1) с параметрами, приведенными в Таблице 5.2.1:

Таблица 5.2.1 – Параметры системы сверхзвуковых недорасширенных струй с дополнительным возмущением, истекающих в сверхзвуковой спутный поток.

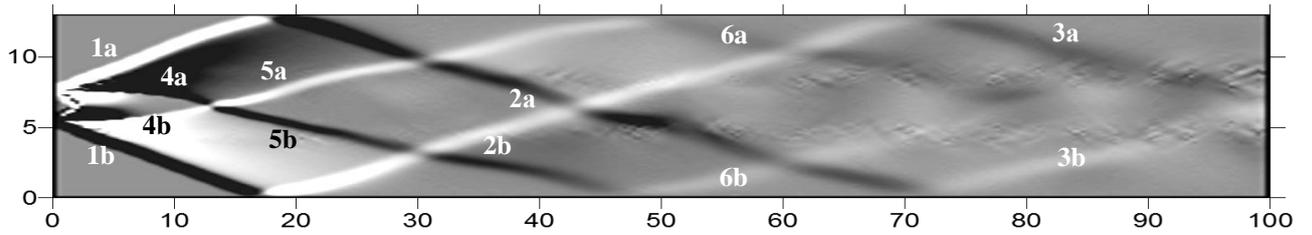
Вариант	M_0	M_∞	p_0	p_∞	$T_0 = T_\infty$	u_0	u_∞	n	ω	$A=B$
1	3	5	10	1	1	0.6	1	10	$2\pi/12$	0.01

Амплитуда и частота дополнительного возмущения равны $A=0.01$ и $\omega = 2\pi/12$, соответственно.

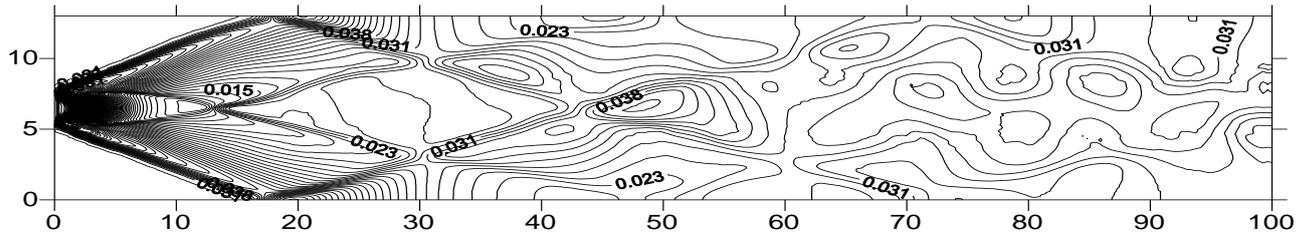
5.2.1. Влияние основных параметров струи и потока на закономерности смещения.

На Рис. 5.2.3 – 5.2.4 представлена мгновенная картина изобар в плоскости xoy в момент времени $t=2000$, демонстрирующая сложную пространственную ударно-волновую структуру, возникающую в результате взаимодействия неизобарических сверхзвуковых струй со сверхзвуковым спутным потоком.

На графиках видно, что, вследствие разности давления между струей и потоками, на кромках сопла возникает присоединенная ударная волна, движущаяся вниз по течению, которую хорошо видно на графиках в плоскости xu (Рис. 5.2.3). Для удобства, фронт волны, доходящий до верхней границы, обозначен на рисунке как $1a$, тогда как до нижней границы – $1b$. Из графика видно, что сформировавшийся скачок уплотнения $1a-1b$ достигает верхнюю границу вычислительной области в сечении $x=19\delta_\theta$, а нижнюю в сечении $x=18\delta_\theta$, отражается от них, формируя ударную волну $2a-2b$. В связи с этим также наблюдается небольшая асимметрия в месте пересечения отраженной ударной волны со струей. Также из Рис. 5.2.3б видно, что отраженная волна $2a-2b$ теряет свою интенсивность (слабо выражена на графиках) и ее вторичное отражение слабо просматривается в сечениях $x=70\delta_\theta$ и $x=71\delta_\theta$ (вторично отраженная волна $3a-3b$).



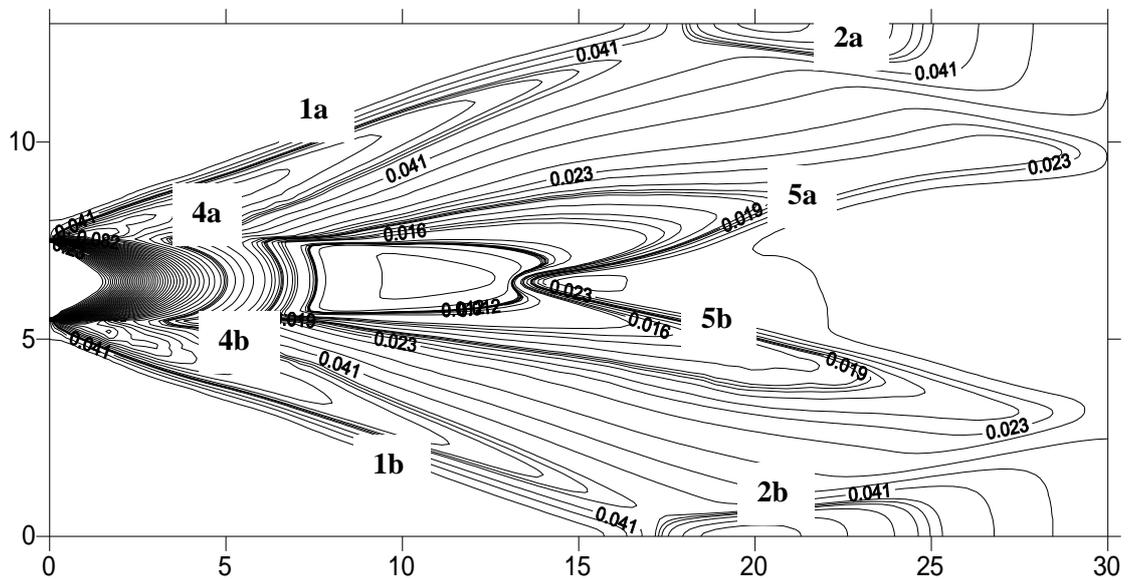
а) теневой рельеф



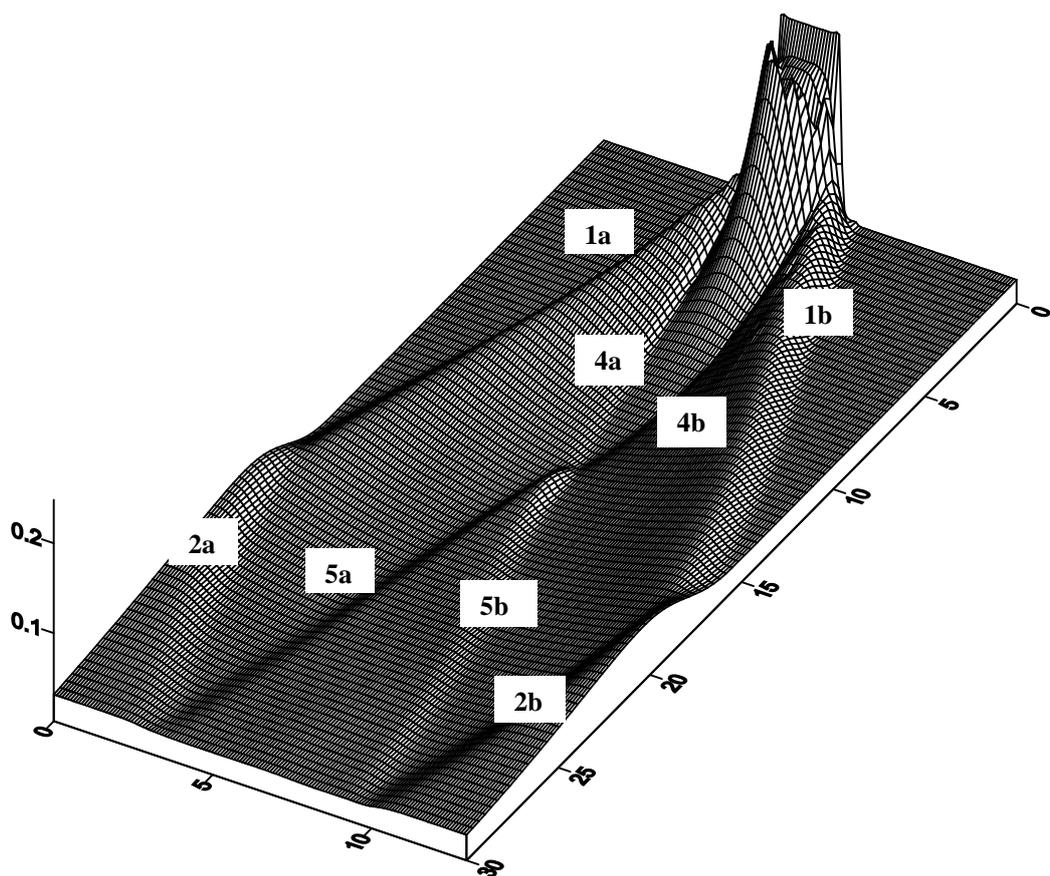
б) изолинии

Рис. 5.2.3 (а, б). Картина изобар в плоскости симметрии, нормальной к оси y

Детальная картина ударно-волновой структуры представлена на Рис. 5.2.4 (а, б), на начальном участке, в области вдува струи в сечениях: $0 < x < 30 \delta_\theta$.



б) изобары в плоскости симметрии, нормальной к оси y



б) изоповерхность

Рис. 5.2.4 (а, б). Картина изобар в области вдува струи до $x=30\delta_\theta$.

Из графиков видно, что внутри струи формируется четкая картина дополнительного скачка уплотнения $4a-4b$, который носит название висячего скачка уплотнения. При недорасширенном истечении осесимметричной струи около кромки сопла возникает пучок волн разрежения, благодаря которому в струе происходит расширение газа от статического давления на срезе сопла до давления в окружающей среде. Спад статического давления приводит к ускорению потока газа и сопровождается отклонением линий тока от первоначального направления, что в свою очередь приводит к расширению струи. Происходит процесс перерасширения. Граница самой струи также искривляется, и отраженные от ее границы характеристики образуют сходящийся пучок, формирующий в свою очередь сверхзвуковое течение сжатия, которое вызывает сужение и торможение струи. Этот процесс сопровождается появлением криволинейной ударной волны, которая и называется висячим скачком $4a-4b$. На подходе к оси струи этот скачок замыкается в сечении $x=14\delta_\theta$ (Рис. 5.2.4 (а, б)), вследствие ослабления перерасширения [134, 135].

В сечении замыкания висячего скачка $4a-4b$ формируется отраженный скачок уплотнения $5a-5b$, который также отчетливо виден на Рис. 5.2.4 (а, б). Скачок $5a-5b$ достигает условных границ вычислительной области в сечениях

$x=49 \delta_\theta$ (на верхней границе) и $x=48 \delta_\theta$ (на нижней), где он отражается с формированием с ударной волны $ba-bb$, интенсивность которой падает вниз по потоку и на графиках она едва прослеживается.

Процесс смешения вдуваемой струи со спутным потоком изучается на примере картин мгновенных изолиний завихренности в плоскости xoy

$\left(\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ в момент времени $t = 3000$, приведенной на Рис. 5.2.5.

На графиках хорошо заметны образовавшиеся в слое смешения вихревые зоны. Они возникают вследствие процесса обмена конечными массами (молями) между струей и потоком, т. е. поперечным переносом количества движения и тепла. Ширина вихревой зоны, как видно из графиков, значительно возрастает вниз по потоку в сечении $x=100 \delta_\theta$.

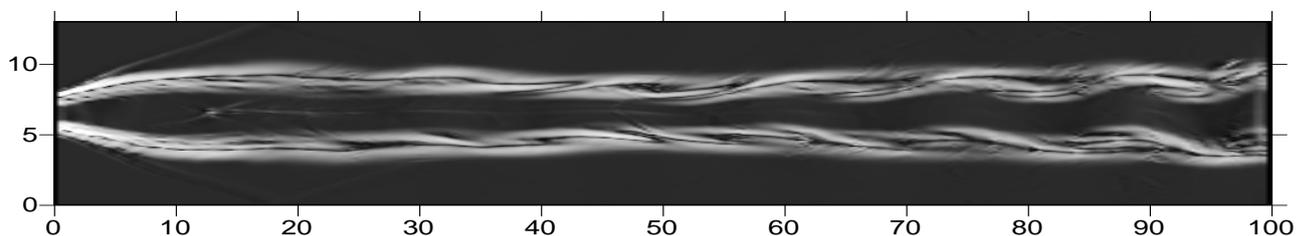
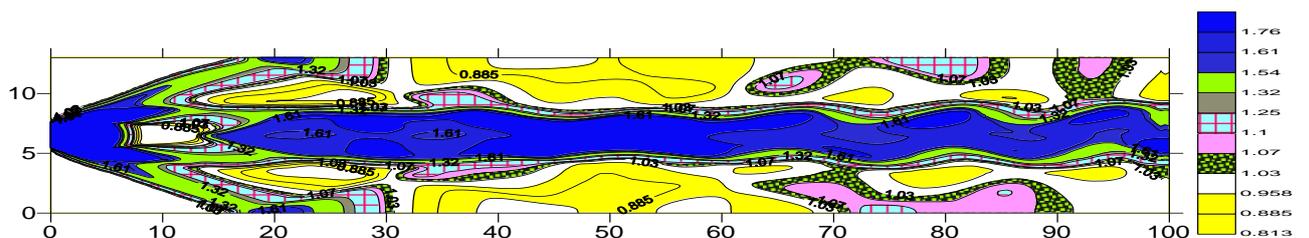


Рис. 5.2.5. Картины завихренностей в плоскости симметрии, нормальной к оси y .

Достаточно четкую картину сформировавшегося слоя смешения демонстрируют изолинии плотностей, приведенные на Рис. 5.2.6 (а, б). Из графиков видно, что заметное искривление струи, происходящее вследствие начальной разности термодинамических параметров, наблюдается уже с сечения $x=39 \delta_\theta$. Заданная разность термодинамических параметров в целом приводит к существенному росту амплитуды возмущения струи вниз по потоку. В результате, к этому моменту времени наблюдается волнообразная картина слоя смешения.

На Рис. 5.2.6 (б) приведены изолинии плотностей в области вдува струи (до сечения $x=20 \delta_\theta$). Из графиков видно, что в области возникновения ударной волны $1a-1b$ (в сечении $x=2 \delta_\theta$) слой смешения расширяется в два раза, что является следствием влияния отрицательного градиента давления.



а) вся область

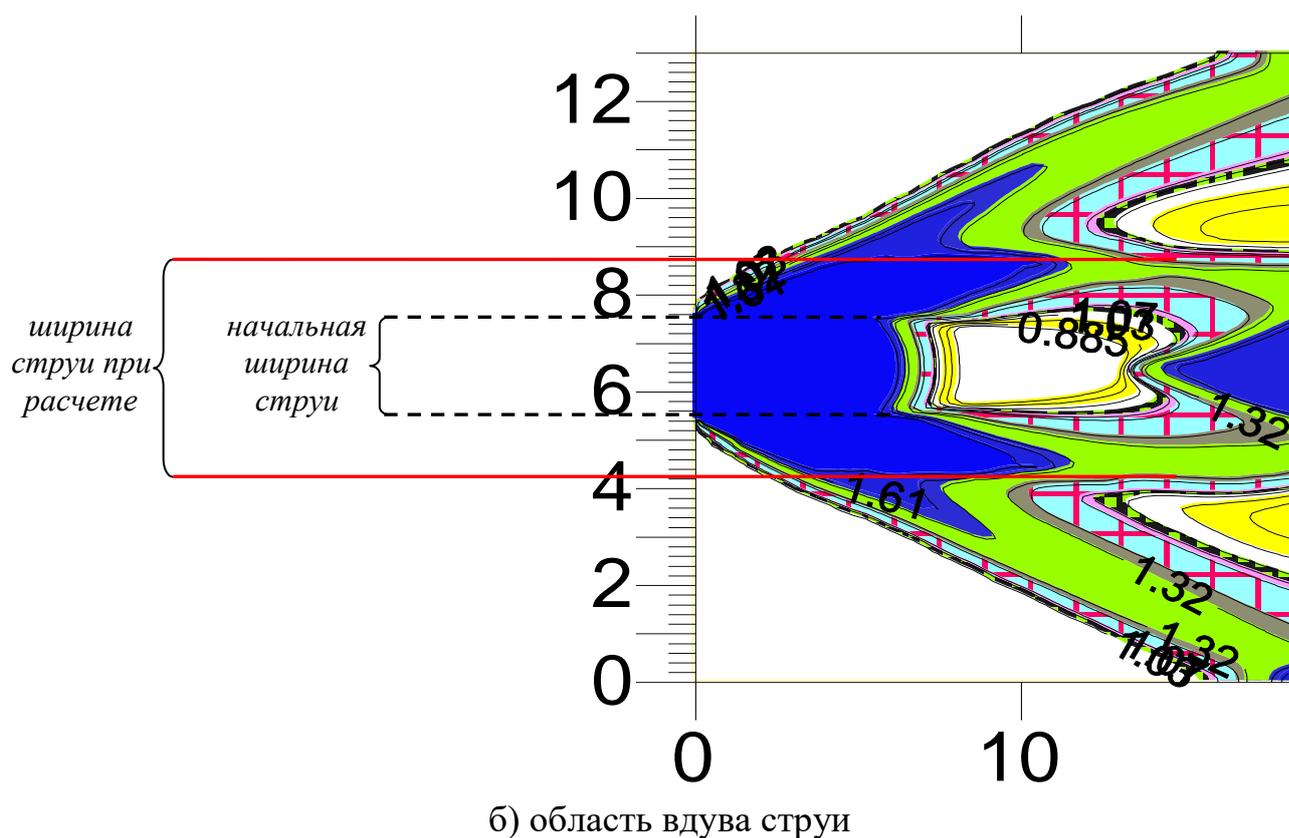


Рис. 5.2.6. Изолинии плотностей в плоскости симметрии, нормальной к оси y .

Далее приводятся результаты численного эксперимента влияния параметра нерасчетности на слой смешения.

Расчеты производятся в диапазоне параметра нерасчетности $2 < n < 12$. Основные варианты и их параметры представлены в Таблице 5.2.2:

Таблица 5.2.2 – Параметры вариантов расчетов при вариации нерасчетностью.

Вариант	M_0	M_∞	p_0	p_∞	$T_0 = T_\infty$	u_0	u_∞	n	ω	$A=B$
2	3	5	0.057	0.029	1	0.6	1	2	$\pi/6$	0.01
3	3	5	0.143	0.029	1	0.6	1	5	$\pi/6$	0.01
4	3	5	0.349	0.029	1	0.6	1	12	$\pi/6$	0.01

На Рис. 5.2.7 – 5.2.8 представлены картины изобар и изолиний плотностей для нерасчетностей $n=2$ (вариант 2), $n=5$ (вариант 3) и $n=12$ (вариант 4).

Из картины изобар, приведенной на Рис. 5.2.7 (а-в), видно, что с увеличением параметра нерасчетности увеличивается угол наклона присоединенных ударных волн $1a-1b$. В свою очередь, увеличение угла наклона приводит к более раннему отражению скачков уплотнения $1a-1b$. Так, например, для различных параметров нерасчетности присоединенная ударная

волна $1a-1b$ достигает границ вычислительной области в разных сечениях x . Например при $n=2$ в $x=25 \delta_\theta$ (Рис. 5.2.7а), при $n=5$ в $x=21 \delta_\theta$ (Рис. 5.2.7б) и при $n=12$ в $x=17 \delta_\theta$ (Рис. 5.2.7в).

Также графики демонстрируют, что вследствие увеличения угла наклона присоединенных ударных волн $1a-1b$, увеличивается расстояние, на котором возникает замыкание висячих скачков $4a-4b$: что увеличивает начальный участок с сечения $x=4 \delta_\theta$ для $n=2$ (Рис. 5.2.7а) до сечения $x=15 \delta_\theta$ для $n=12$ (Рис. 5.2.7 в). Зависимость угла падения скачков от параметра нерасчетности демонстрирует Рис. 5.2.8 для трех значений n : 2, 5, 12, причем для $n=2$ угол $\alpha = 25^\circ$, для $n=5$ угол $\beta = 28^\circ$, а для $n=12$ угол $\gamma = 35^\circ$.

Сравнение картин изолиний плотностей для трех параметров нерасчетности, представленных на Рис. 5.2.9 (а-в), демонстрирует, что с увеличением параметра нерасчетности также увеличивается и ширина зоны смешения. Так, например, при $n=2$ (Вариант 2), вследствие незначительного градиента давления, слой смешения струи и потока заметно тоньше и характеризуется существенными возмущениями в поперечных направлениях (Рис. 5.2.9 а).

На картинах изолиний плотностей для нерасчетности $n=5$ (Вариант 3) на Рис. 5.2.8б видно, что здесь зона смешения расширяется на 0.5 калибров, тогда как на Рис. 5.2.9в, для нерасчетности $n=12$ (Вариант 4), слой смешения значительно утолщается с изначальных 2 калибров почти до 5,5 калибров.

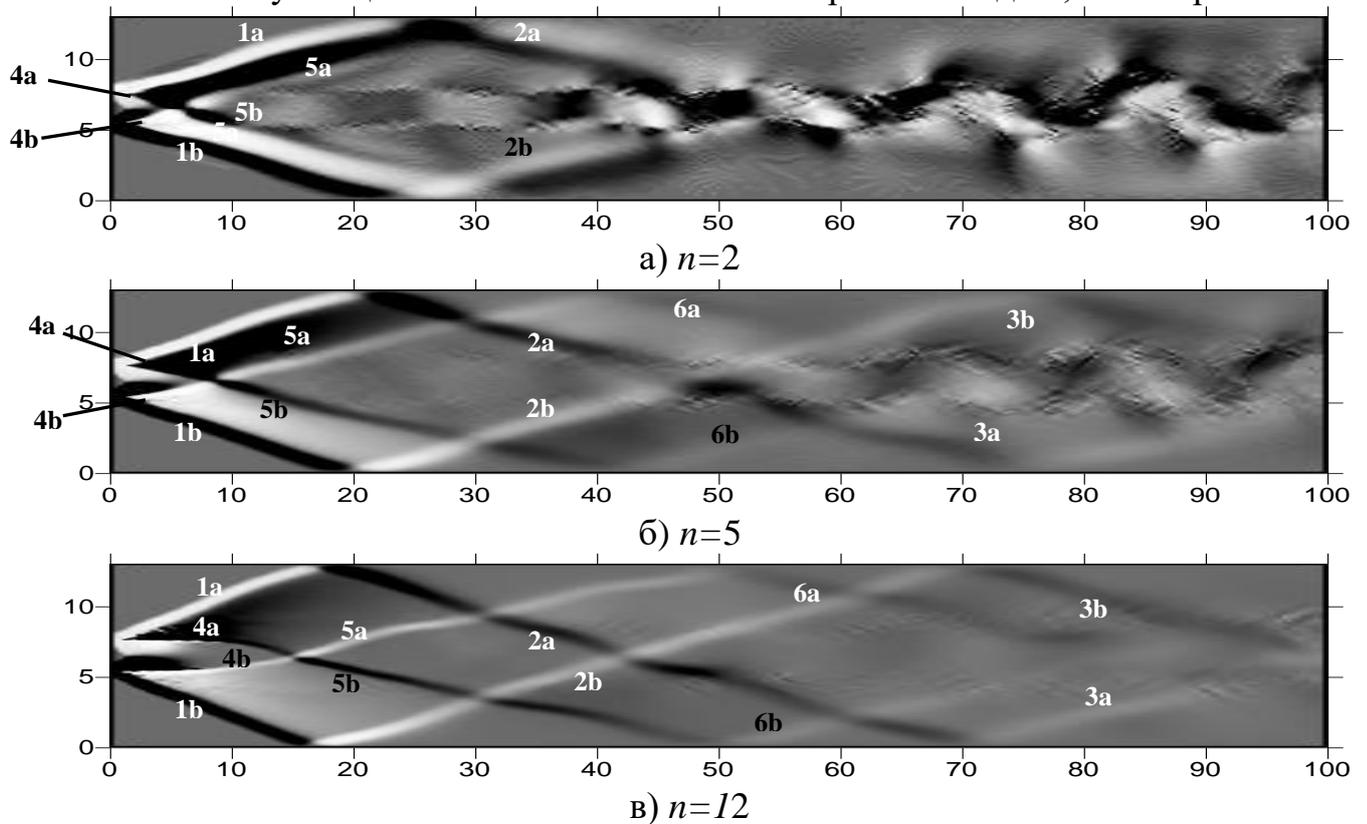


Рис. 5.2.7 (а-в). Картина изобар в плоскости симметрии, нормальной к оси y

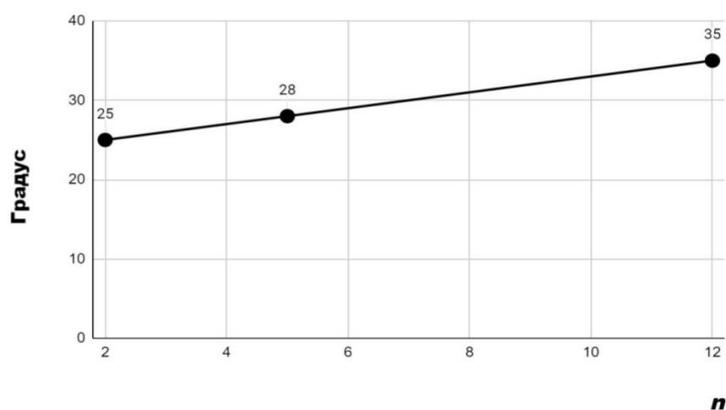


Рис. 5.2.8. Зависимость угла падения ударной волны от n

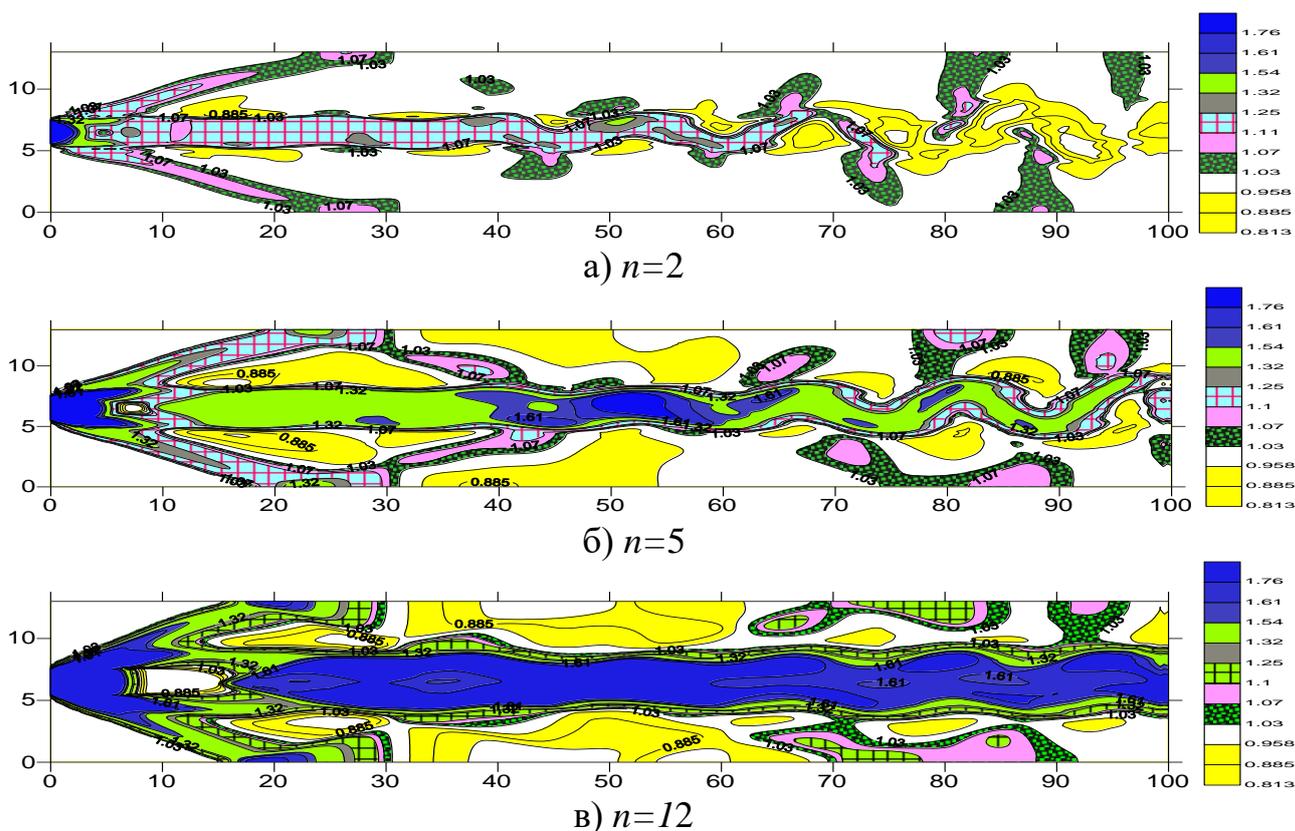
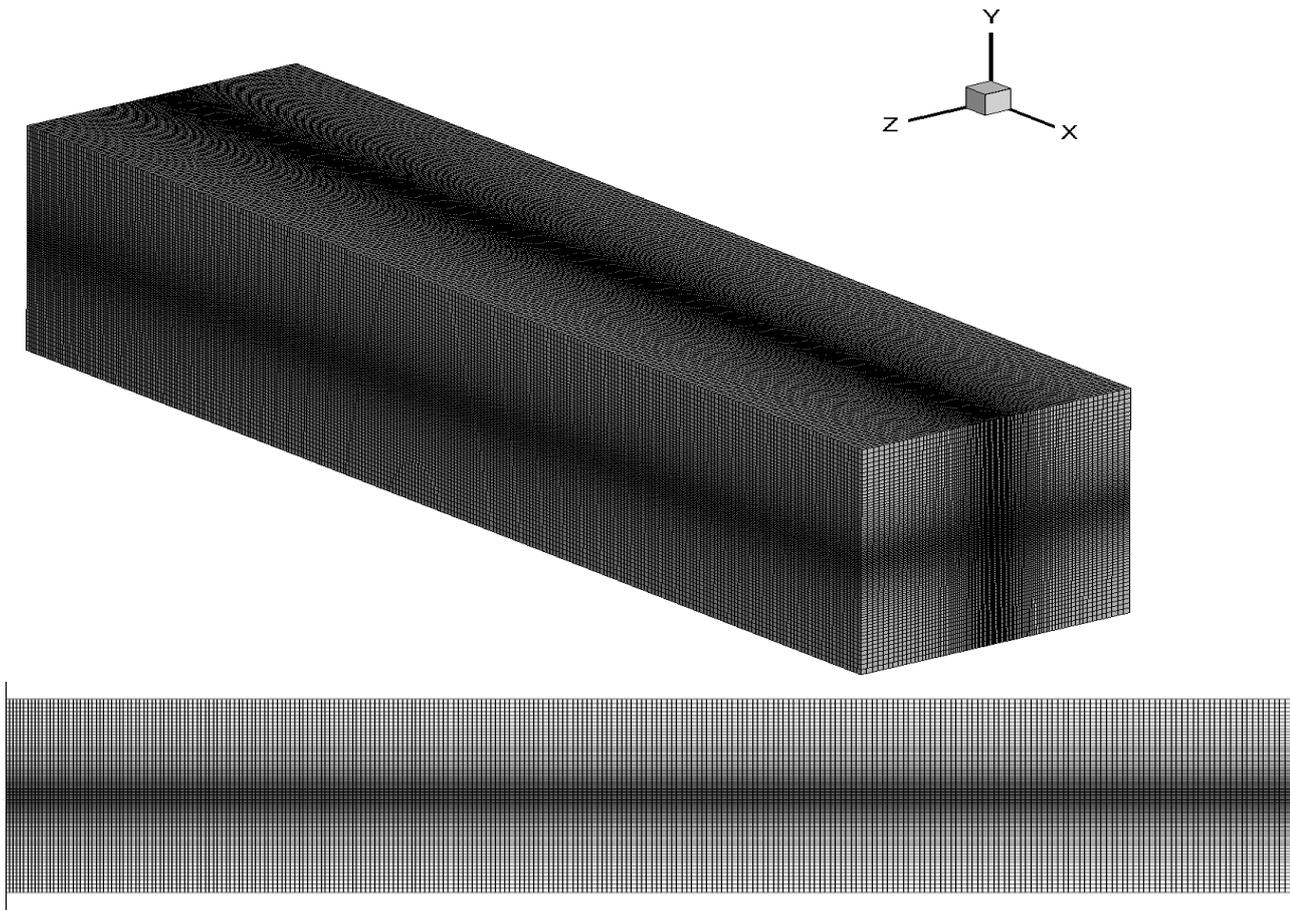


Рис. 5.2.9 (а-в). Картина изолиний плотностей в плоскости симметрии, нормальной к оси y

На Рис. 5.2.9 с изображена используемая вычислительная сетка, состоящая из $271 \times 151 \times 151$ узлов (6 179 071 узлов). На слое смешения, а также на месте формирования ударной волны применяется сгущение сетки. Зоны скачков уплотнения разрешаются с использованием 8-10 узлов вычислительной сетки.



Одной из важнейших проблем при моделировании истечения сверхзвуковых недорасширенных струй в спутный сверхзвуковой поток, является изучение образующейся ударно-волновой структуры с точки зрения влияния на смешение струй и потока.

Ниже приведены результаты сравнительного анализа влияния ударно-волновой структуры на расширение слоя смешения.

Для этого выполнены численные расчеты поставленной проблемы с постановкой 2 и проведен сравнительный анализ полученных результатов с результатами при постановке 1 для двух нерасчетностей $n=2$ и $n=10$.

Параметры расчетов приведены в Таблице 5.2.3:

Таблица 5.2.3 – Параметры вариантов расчетов с вариацией постановок.

Вариант	M_0	M_∞	p_0	p_∞	$T_0 = T_\infty$	u_0	u_∞	n	ω	$A=B$
5	3	5	0.057	0.029	1	0.6	1	2	$\pi/6$	0.01
6	3	5	0.286	0.029	1	0.6	1	10	$\pi/6$	0.01

При постановке 1, как было описано ранее, отраженная ударная волна $2a-2b$ (Рис. 5.2.3) достигает слоя смешения струи и приводит к возникновению некоторой неустойчивости.

При постановке 2, отраженных ударных волн $2a-2b$ не возникает, то есть слой смешения не подвергается воздействию ударных волн.

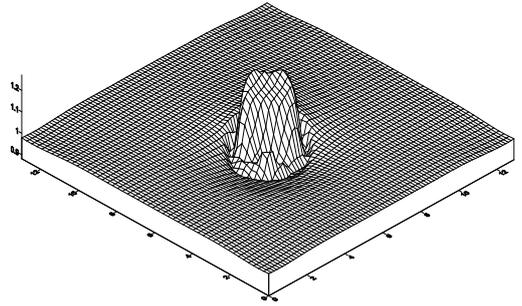
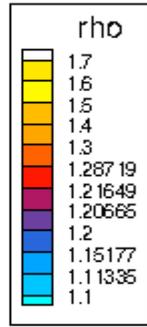
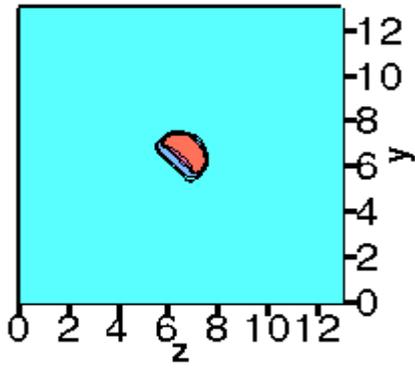
Результаты расчетов представлены на Рис. 5.2.10 – 5.2.17, при двух постановках для различных значений параметра нерасчетности.

Так на картинах изолиний плотностей в сечении $x=49 \delta_\theta$ (Рис. 5.2.10) для слабонедорасширенной ($n=2$) сверхзвуковой струи в спутном потоке отраженная волна $2a-2b$ не оказывает влияния на слой смешения, вследствие недостаточной интенсивности волны. Данный факт подтверждается графиками параметра толщины завихренности на Рис. 5.2.11 и картинами изолиний завихренностей, представленных на Рис. 5.2.12 – 5.2.13 в верхнем и нижнем сечениях z границ струи: $z=5 \delta_\theta$ и $z=8.5 \delta_\theta$.

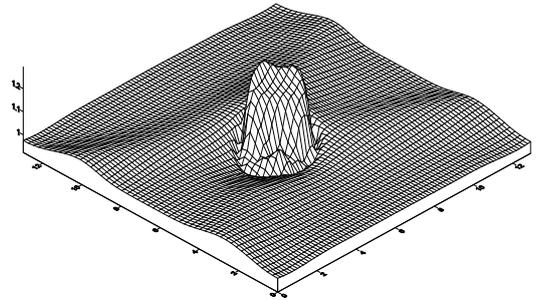
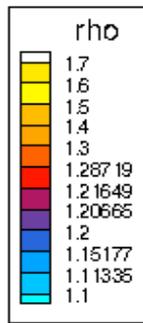
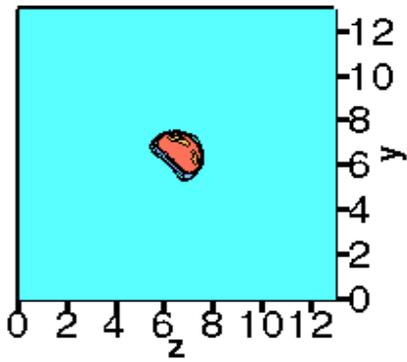
Тогда как результаты для нерасчетности $n=10$, приведенные на Рис. 5.2.14 – 5.2.17, демонстрируют явное влияние отраженной ударной волны $2a-2b$ на толщину слоя смешения и возникновение неустойчивости: из графиков изолиний плотностей на Рис. 5.2.14 видно, что в области взаимодействия скачка $2a-2b$ со струей в сечении $x=45 \delta_\theta$ слой смешения сужается на 1 калибр (постановка 1).

Также графики толщины завихренности (Рис. 5.2.15) демонстрируют линейный рост неустойчивости вниз по потоку к моменту времени $t=2000$, а именно: при постановке 1 значение δ_ω возрастает на $0.32 \delta_\theta$ (на графике $\delta_\omega = 2.1 \delta_\theta$) по сравнению постановкой 2 (на графике $\delta_\omega = 1.78 \delta_\theta$). Данный факт указывает на то, что отраженная ударная волна $2a-2b$ расширяет зону смешения. Полученный результат также подтверждается картинами изолиний завихренностей на Рис. 5.2.16 – 5.2.17 в верхнем и нижнем сечениях z границ струи: $z=4 \delta_\theta$ и $z=9.2 \delta_\theta$.

Таким образом, влияние отраженной ударной волны, прямо зависит от значения параметра нерасчетности, а именно: с увеличением нерасчетности начинает проявляться влияние отраженных скачков уплотнения на слой смешения струи и потока.



а) Постановка 2



а) Постановка 2

Рис. 5.2.10 (а, б). Картина изолиний плотностей для $n=2$ в сечении $x=49 \delta_\theta$, нормальном к оси y

Постановка 2

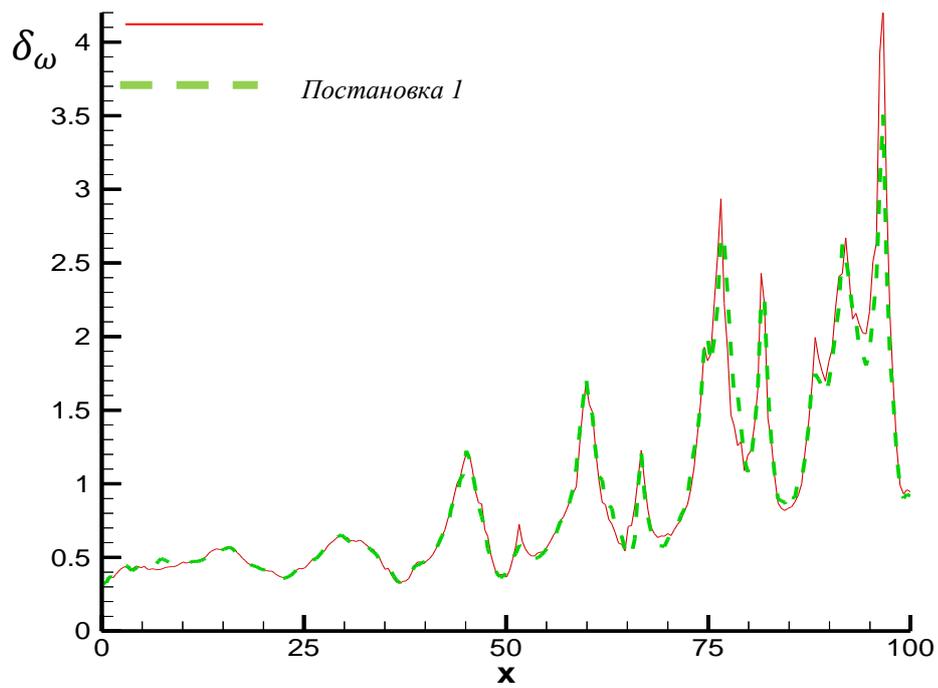
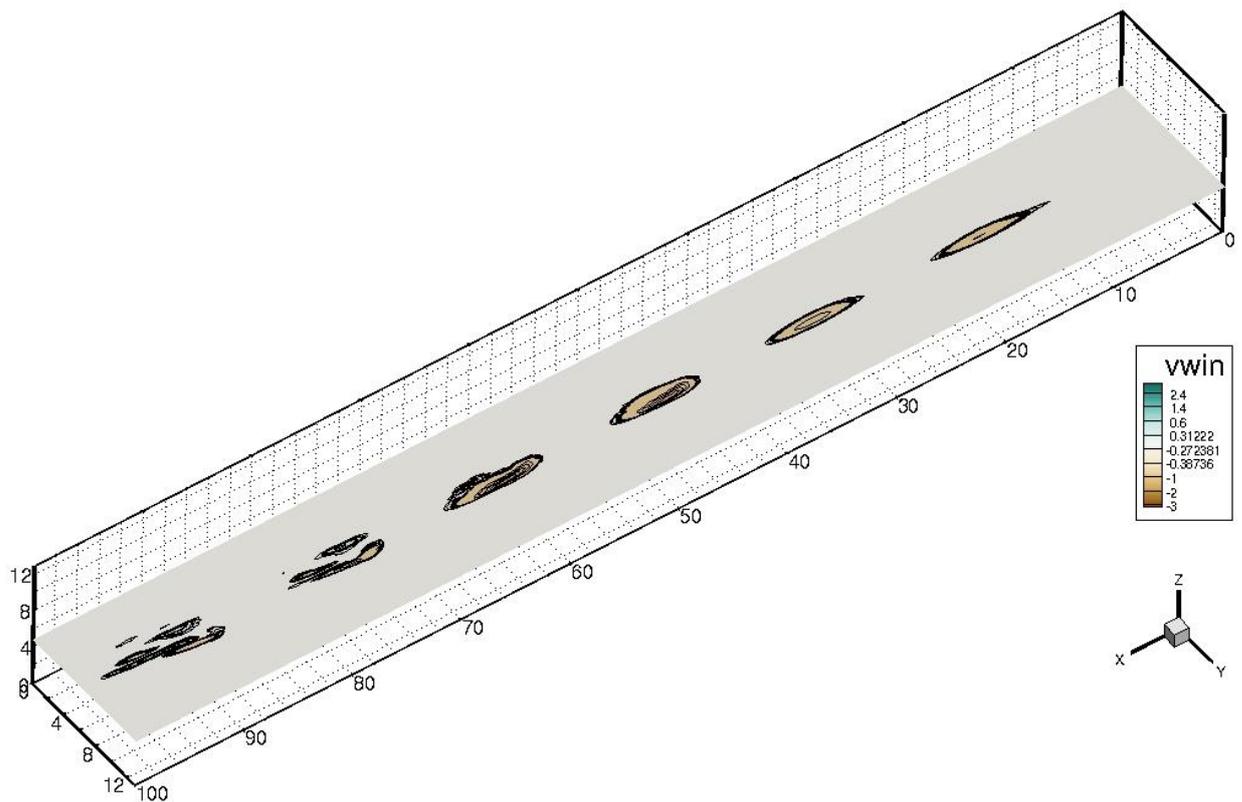
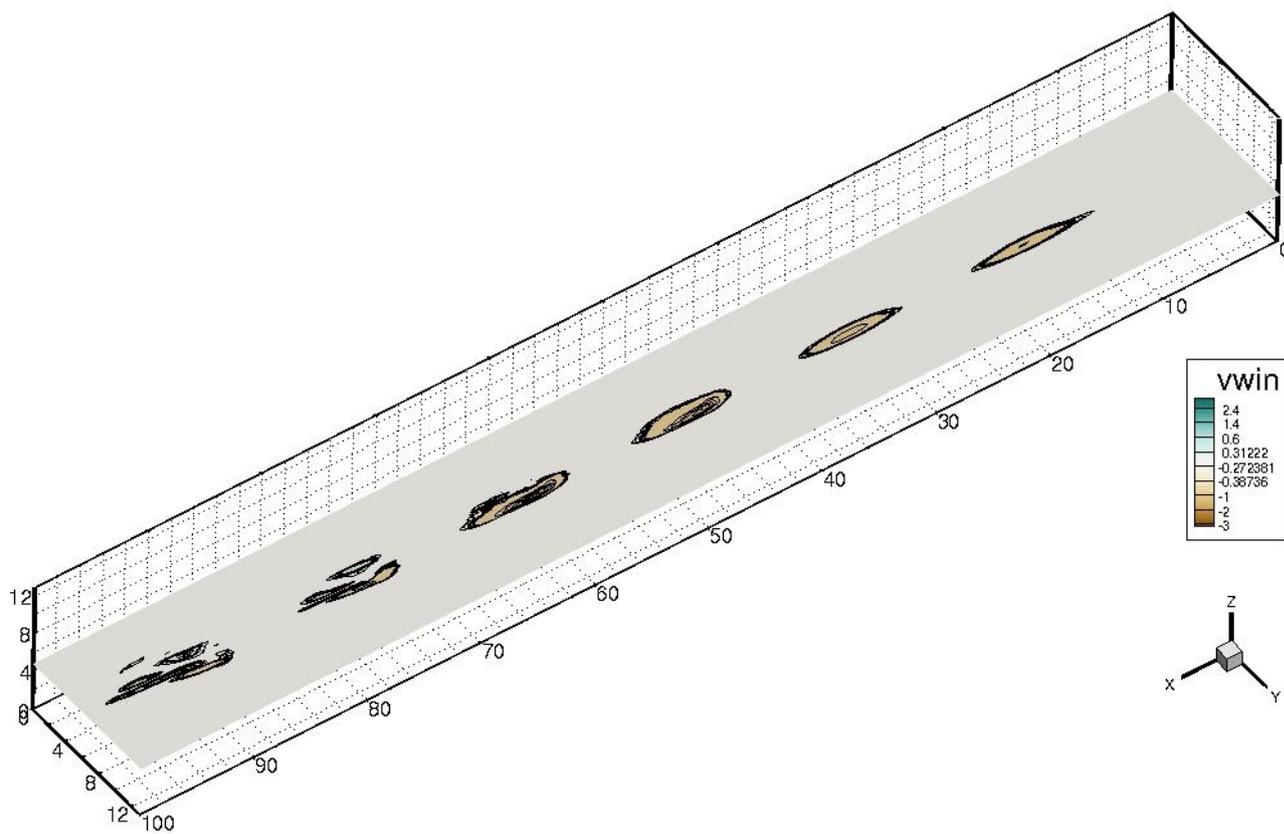


Рис. 5.2.11. Толщина завихренности для $n=2$ для двух постановок

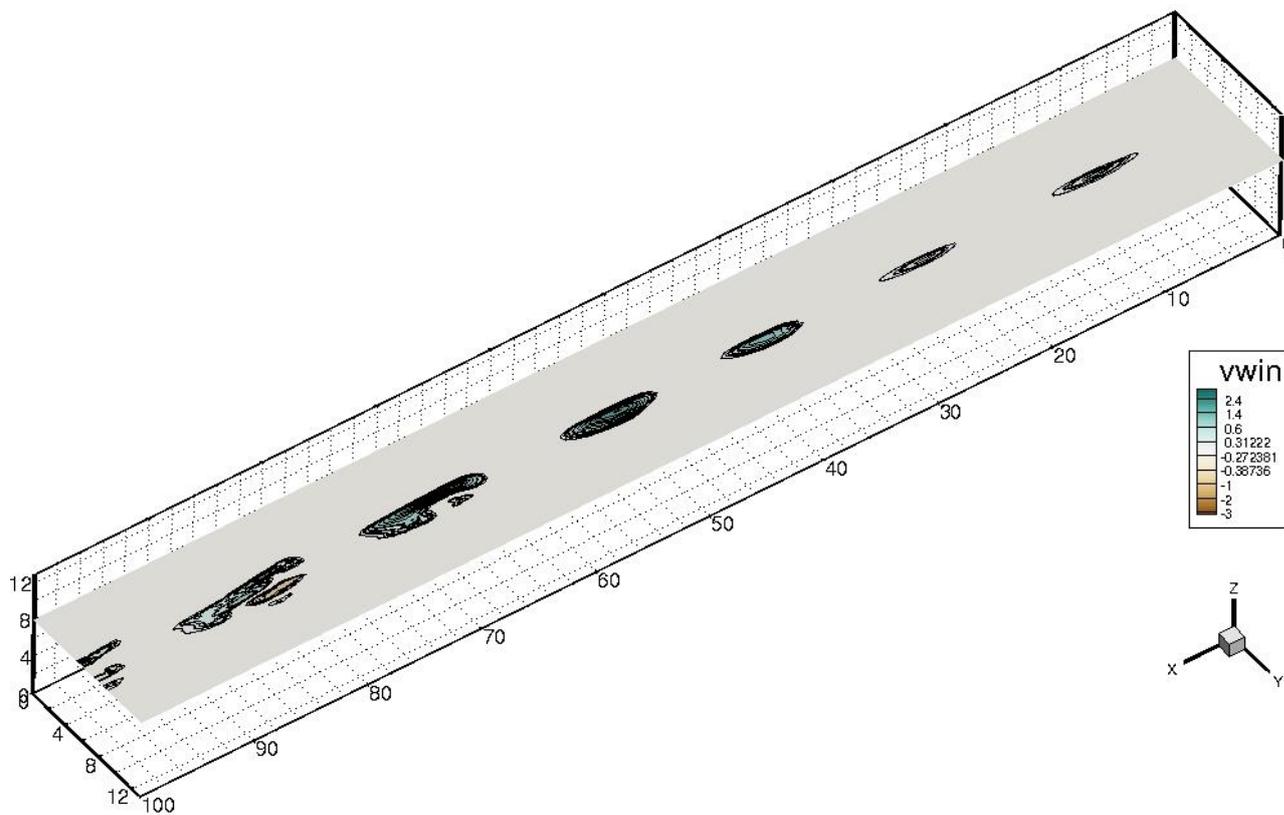


а) Постановка 2

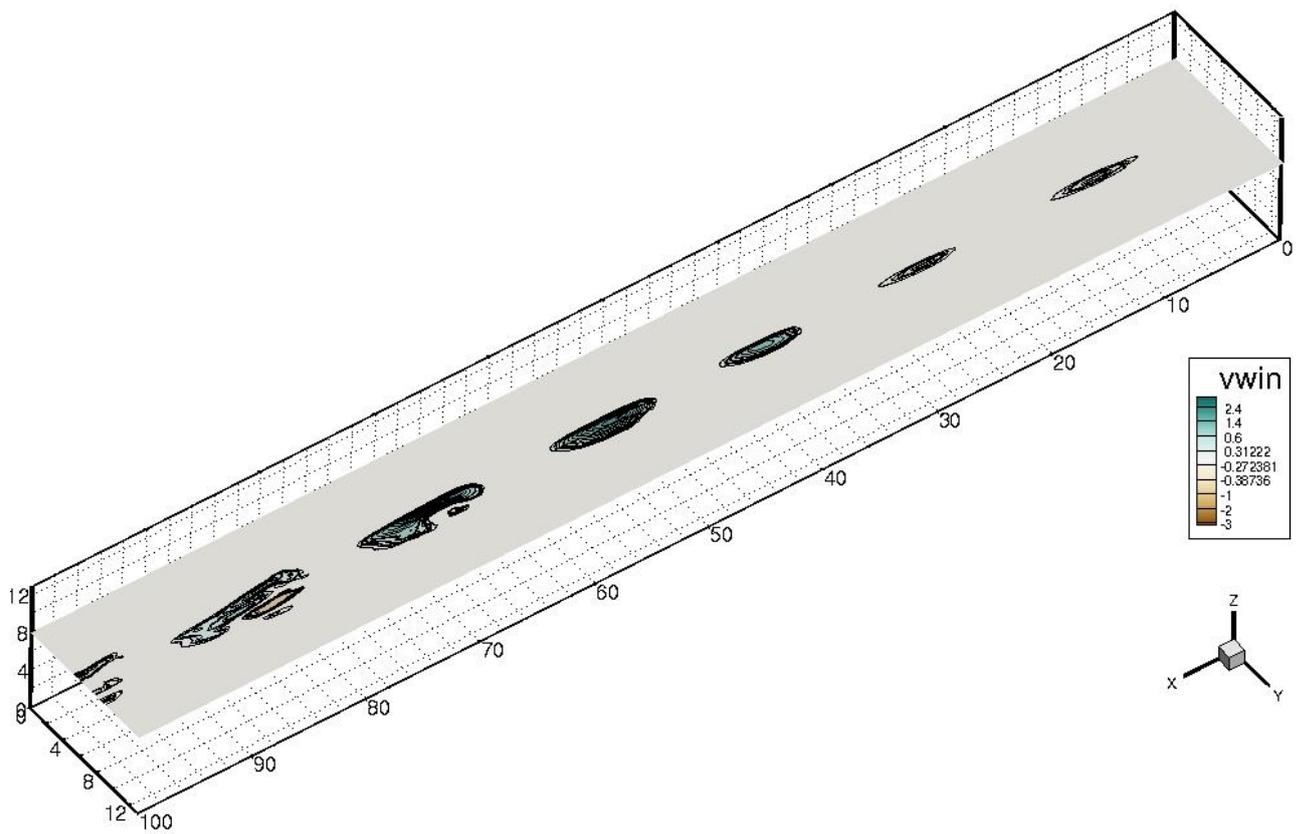


б) Постановка 1

Рис. 5.2.12. Изолинии завихренности в сечении $z=5 \delta_\theta$ для $n=2$

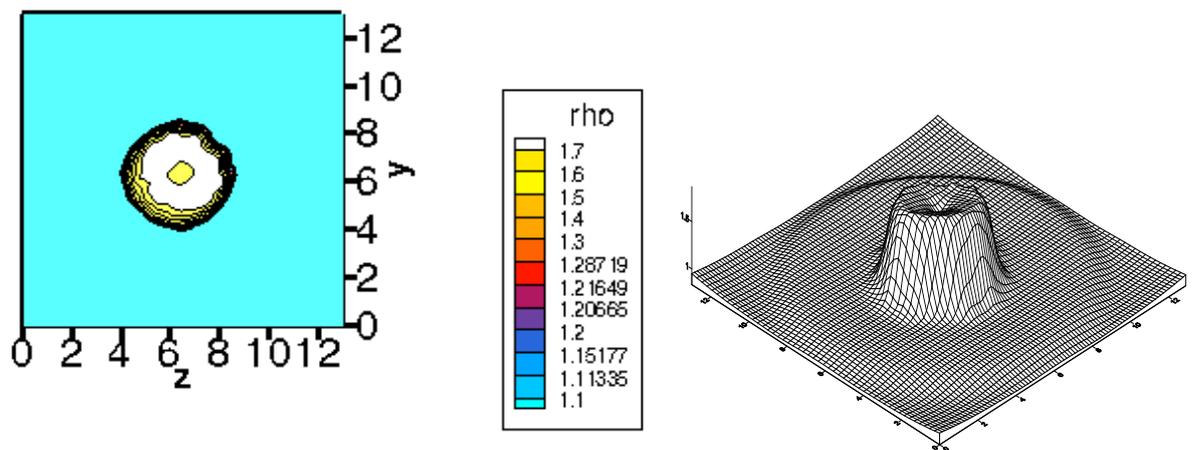


а) Постановка 2

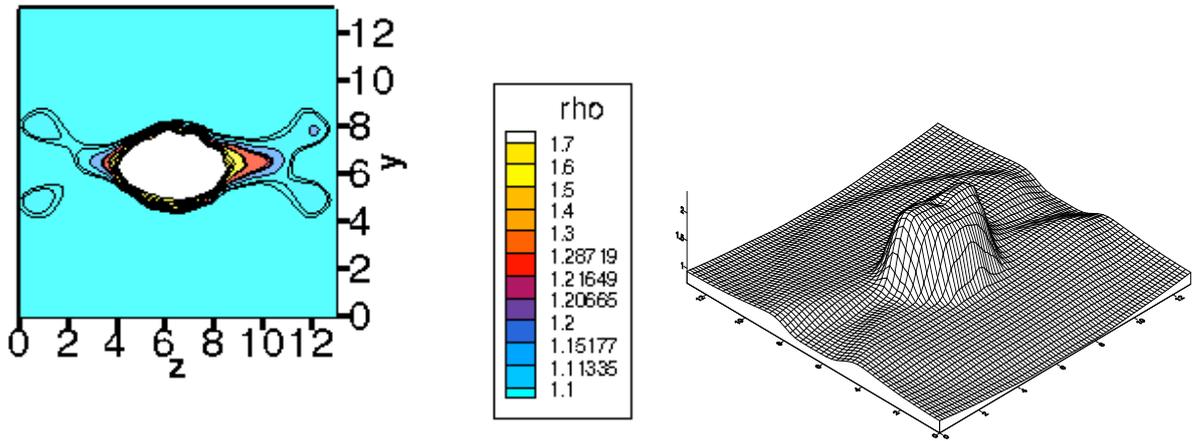


б) Постановка 1

Рис. 5.2.13. Изолинии завихренности в сечении $z=8.5 \delta_\theta$ для $n=2$



а) Постановка 2



а) Постановка 1

Рис. 5.2.14 (а, б). Картина изолиний плотностей для $n=10$ в сечении $x=49 \delta_\theta$, нормальном к оси y

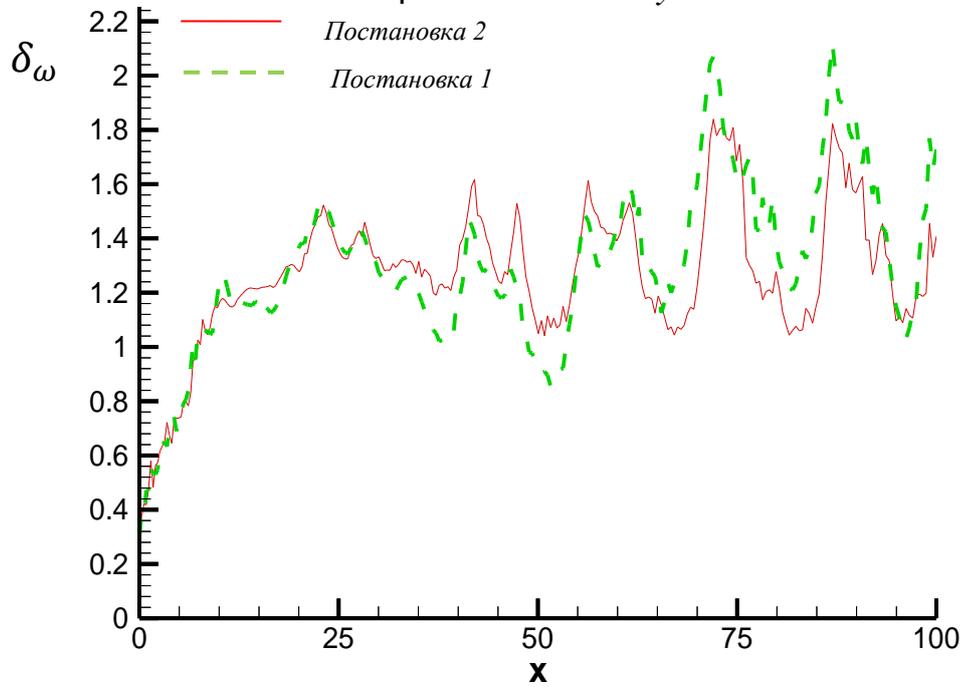
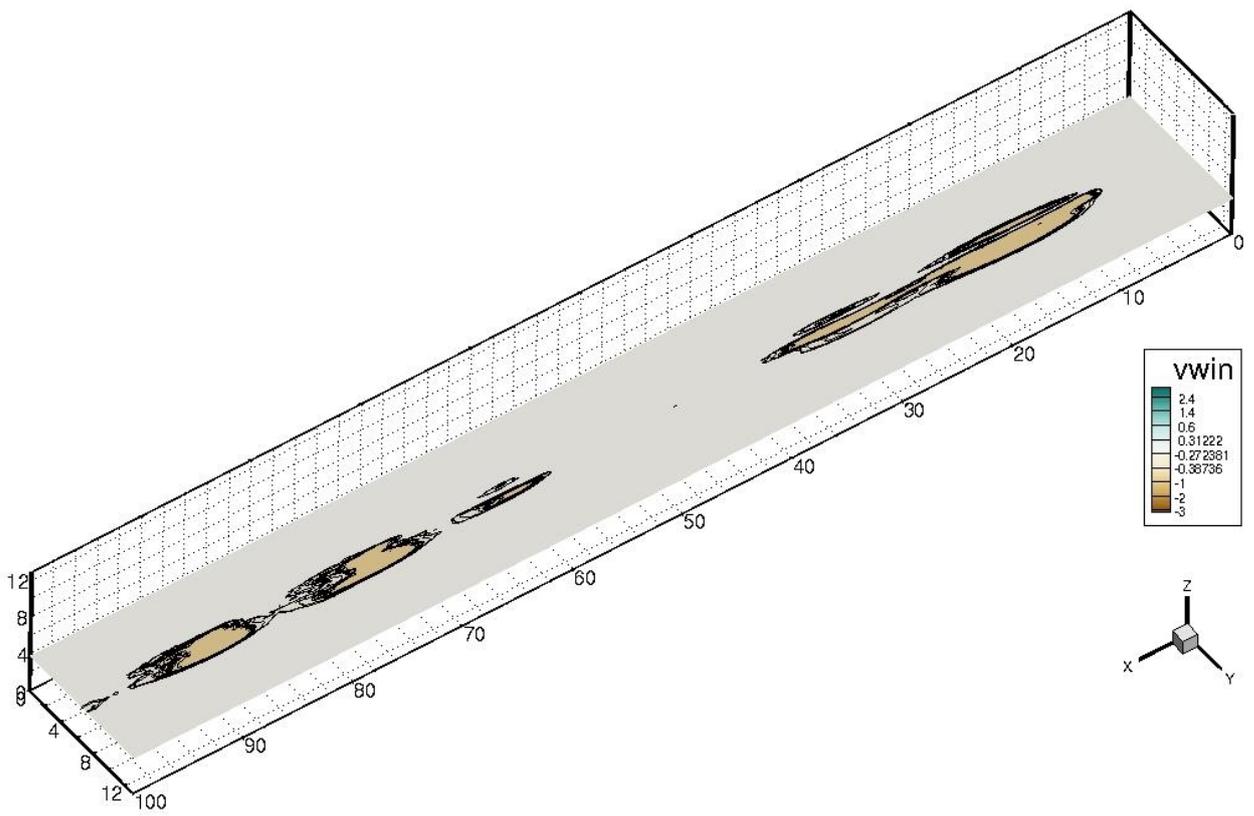
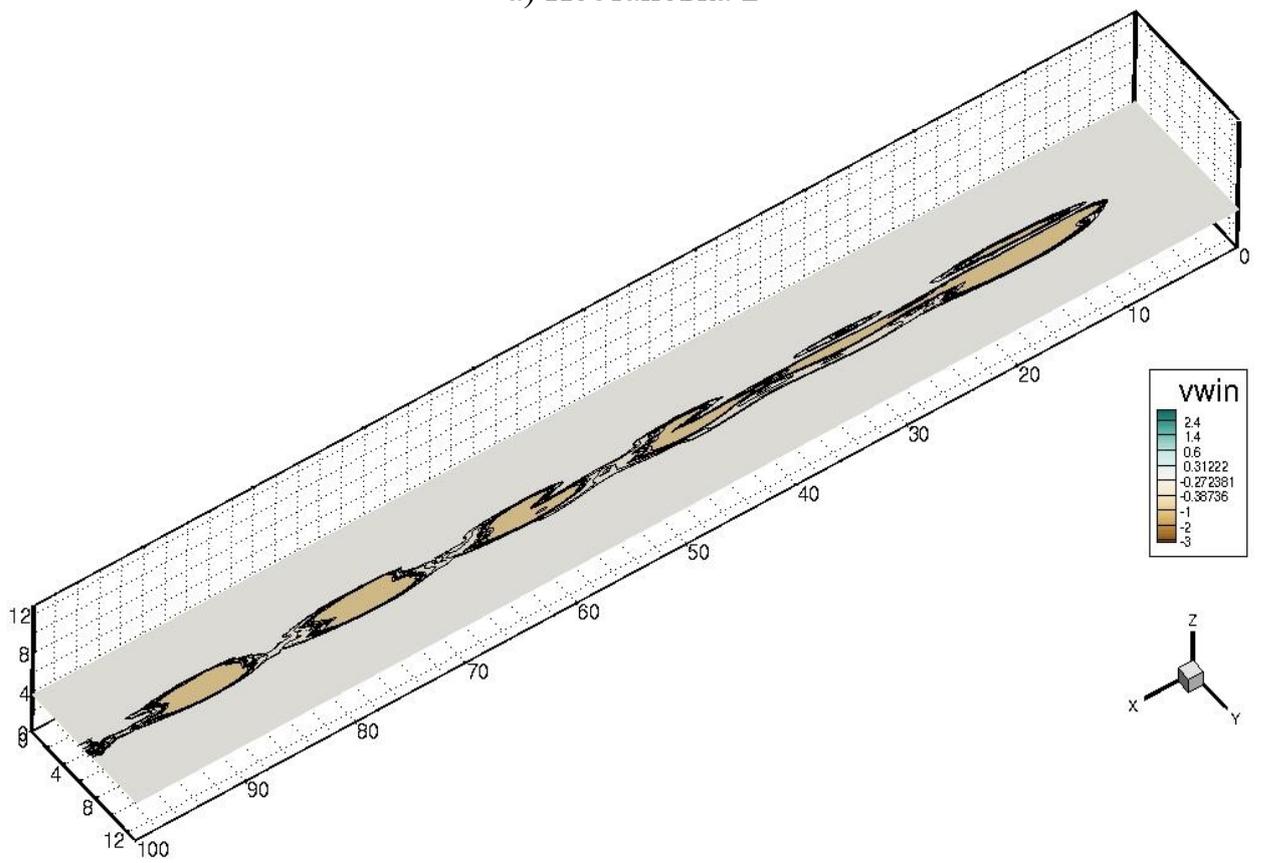


Рис. 5.2.15. Толщина завихренности для $n=10$ для двух постановок

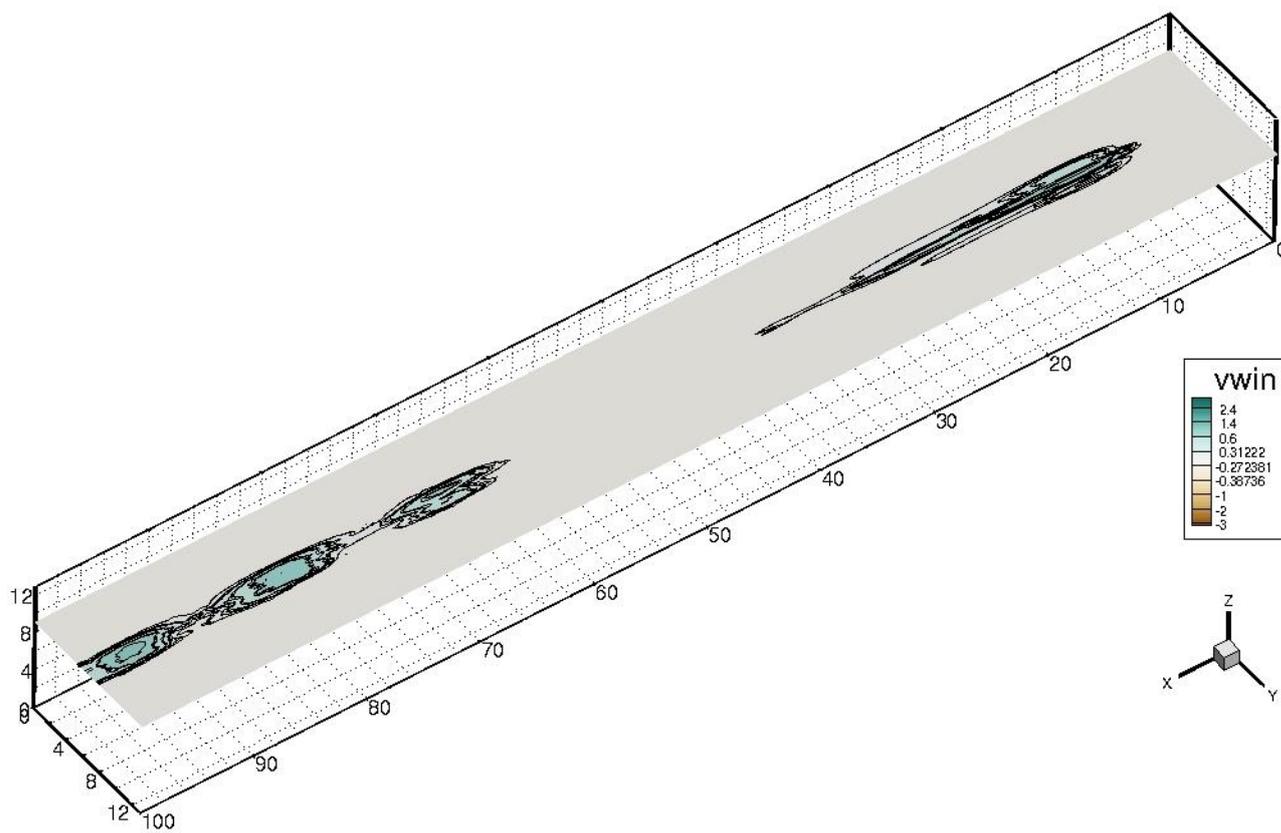


а) Постановка 2

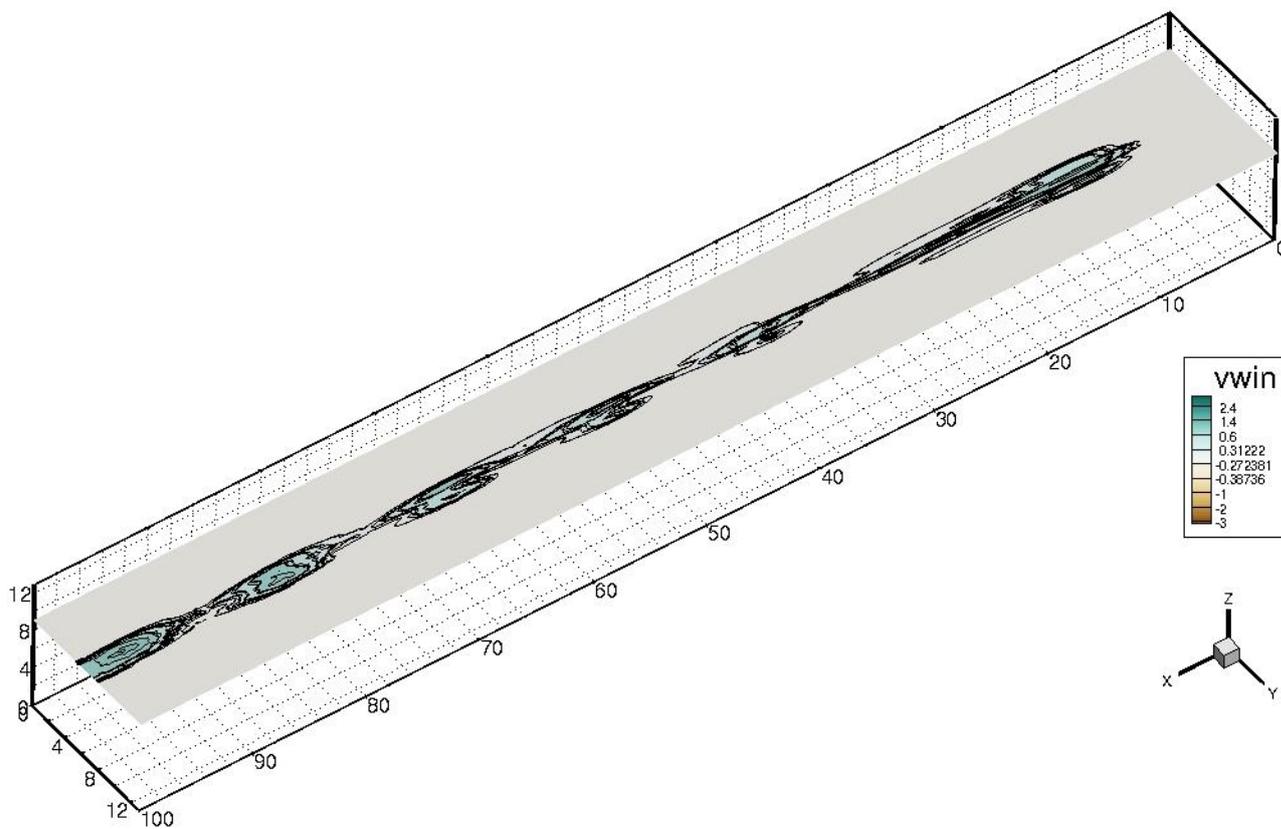


б) Постановка 1

Рис. 5.2.16. Изолинии завихренности в в сечении $z=4 \delta_\theta$ для $n=10$



а) Постановка 2



б) Постановка 1

Рис. 5.2.17. Изолинии завихренности в сечении $z=9.2 \delta_\theta$ для $n=10$

Ниже приводится влияние вариации чисел Маха струи и потока на слой смешения. Основные параметры расчетов приведены в таблице 5.2.4. Результаты представлены для вариации чисел Маха струи (варианты 7-8, таблица 5.2.4) и вариации чисел Маха потока (варианты 9-10, таблица 5.2.4).

Таблица 5.2.4 – Параметры вариантов расчетов с вариацией чисел Маха струи и потока.

Вариант	M_0	M_∞	p_0	p_∞	$T_0 = T_\infty$	u_0	u_∞	n	ω	$A=B$
7	2	5	0.286	0.029	1	0.4	1	10	$2\pi/12$	0.01
8	4	5	0.286	0.029	1	0.8	1	10	$2\pi/12$	0.01
9	3	4	0.446	0.045	1	0.75	1	10	$2\pi/12$	0.01
10	3	6	0.198	0.020	1	0.5	1	10	$2\pi/12$	0.01

Результаты, полученные при вариации чисел Маха струи (варианты 7-8), приведенные на Рис. 5.2.18 – 5.2.23, демонстрируют прямое влияние увеличения M_0 на рост ширины слоя смешения струи и потока.

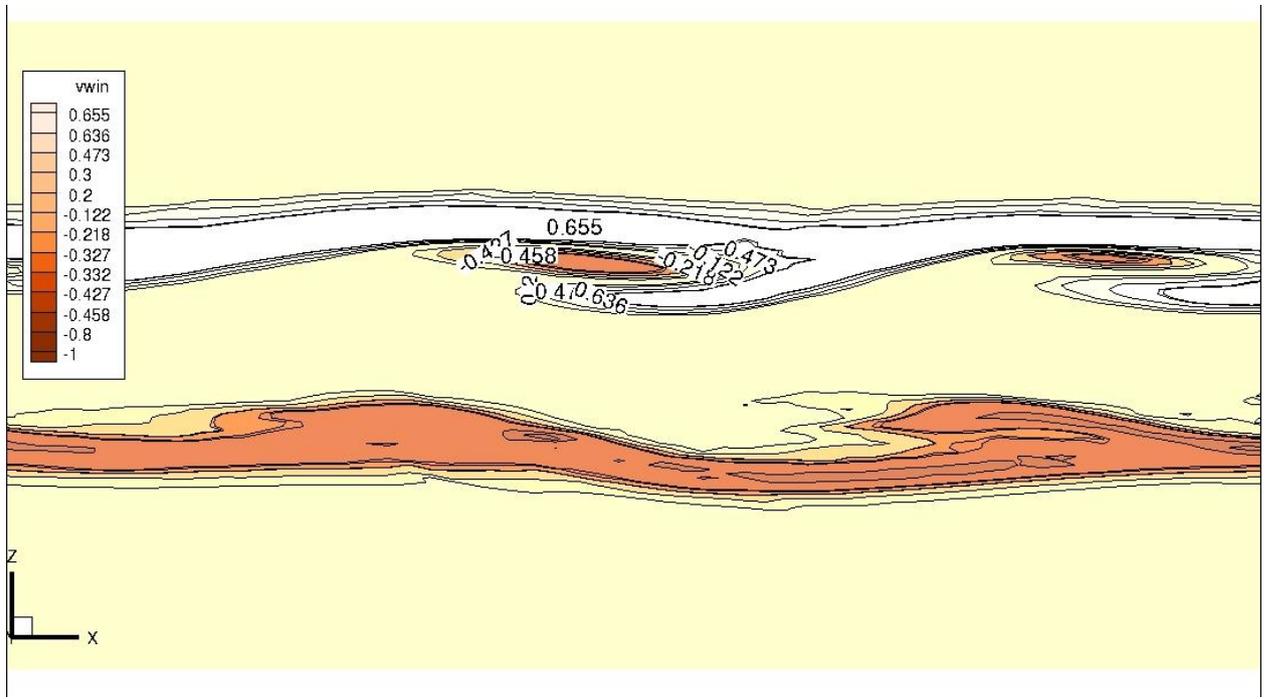
На картинах изолиний завихренностей в сечении z на Рис. 5.2.18 (а-б) можно увидеть, что образовавшиеся вихри имеют вытянутую в продольном направлении эллиптическую форму, причем увеличение M_0 приводит к тому, что вихри становятся еще более вытянутыми. Так, например, при $M_0 = 2$ ширина вихря составляет $5 \delta_\theta$ калибров, а при $M_0 = 4$ вихрь вытягивается вдоль продольной координаты в 2.5 раза, и ширина его составляет 12 калибров.

Картины изолиний плотностей в плоскости симметрии, нормальной к оси y (Рис. 5.2.19 а-б) демонстрируют то, что увеличение M_0 приводит к утолщению слоя смешения на $2 \delta_\theta$ калибра. Это, в свою очередь, существенно влияет на увеличение зоны смешения струи с потоком, что подтверждается графиками толщины завихренности, представленными на Рис. 5.2.20, где при $M_0 = 4$ уже вверх по потоку на участке $0 < x < 40 \delta_\theta$ значение δ_ω в полтора раза выше, чем при $M_0 = 2$, а максимальное значение, равное $\delta_\omega = 2.22$, выше на 0.34.

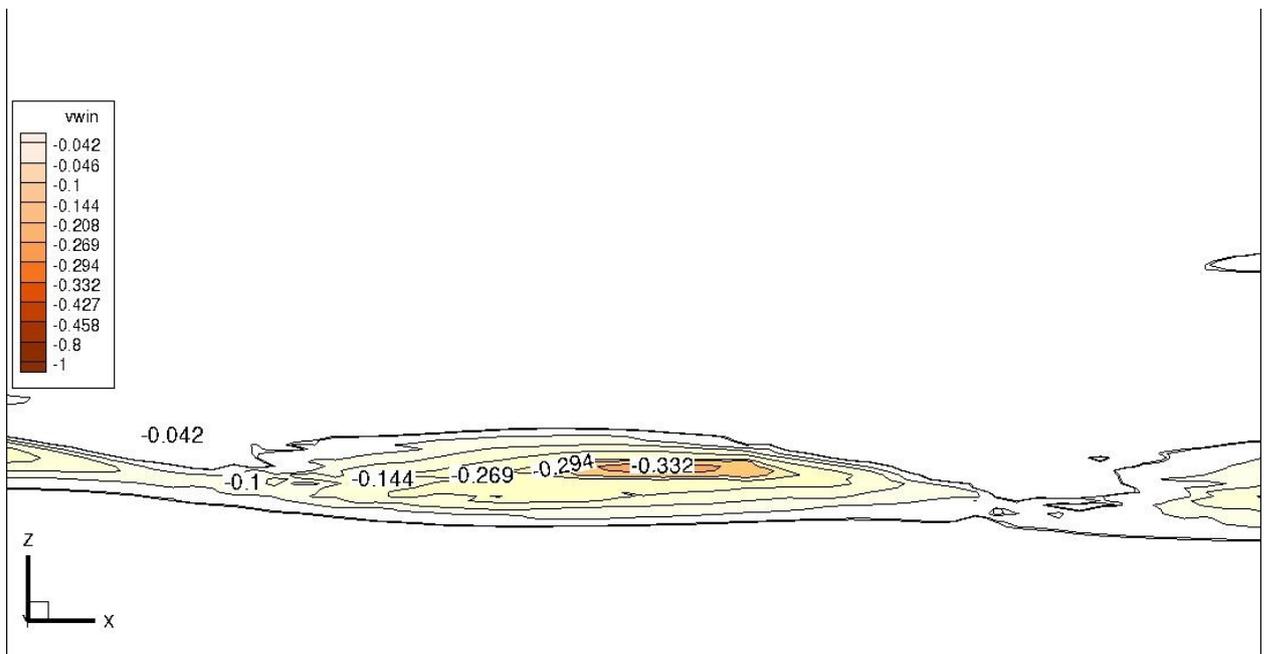
Вариация же чисел Маха потока (варианты 9-10) демонстрирует обратную зависимость, т. е. в этом случае увеличение M_∞ приводит к сужению зоны смешения.

Тем не менее, на картинах завихренностей в сечении z (Рис. 5.2.21 а-б) видно, что для больших M_∞ образовавшиеся вихри вытянуты сильнее по сравнению с графиками для меньших значений M_∞ : при $M_\infty = 4$ ширина одного вихря составляет $12 \delta_\theta$ калибров, а при увеличенном $M_\infty = 6$ образованный вихрь имеет еще более вытянутую форму с шириной в $20 \delta_\theta$ калибров.

Также графики мгновенных изолиний плотностей, приведенные на Рис. 5.2.22 (а-б), демонстрируют, что вследствие увеличения значения M_∞ , слой смешения истончается на 0.5 калибров. Графики толщины завихренности, представленные на Рис. 5.2.23, подтверждают это утверждение, демонстрируя меньшие значения δ_ω при больших числах Маха потока.



а) $M_0 = 2$



б) $M_0 = 4$

Рис. 5.2.18 (а, б). Изолинии завихренностей в сечении z , вихревые структуры

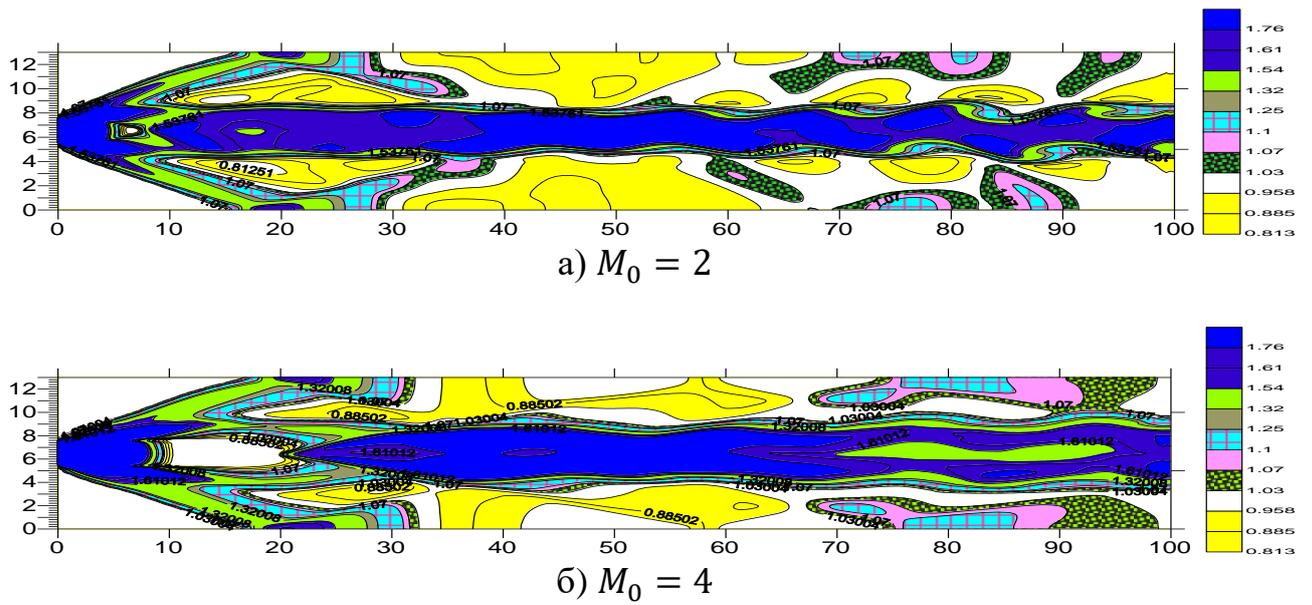


Рис. 5.2.19 (а, б). Картина изолиний плотностей в плоскости симметрии, нормальной к оси y , при вариации M_0

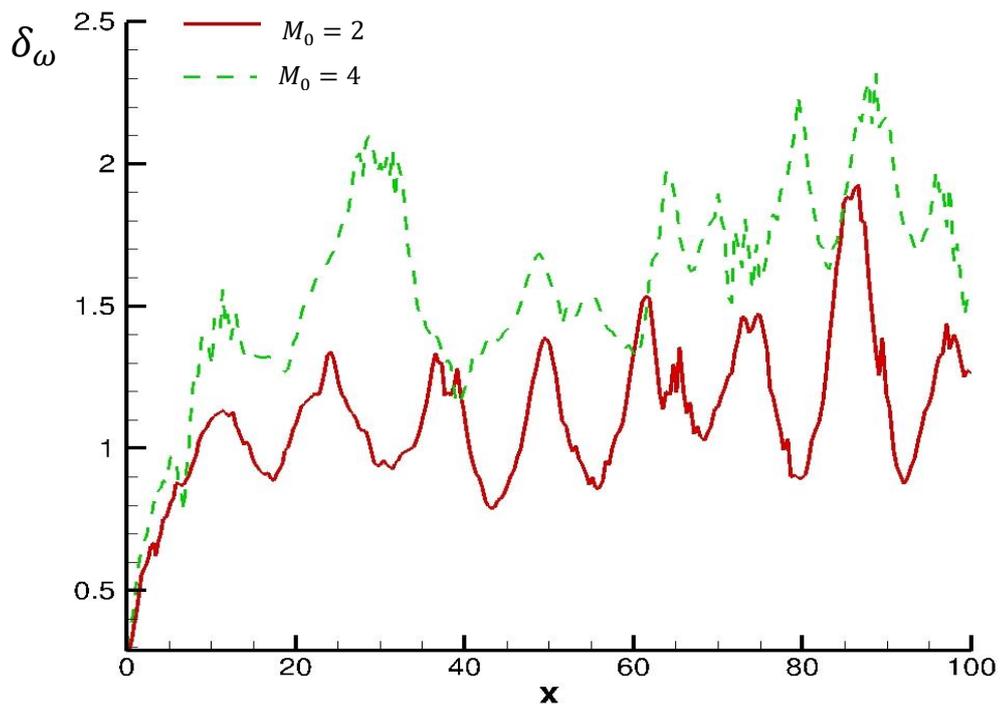
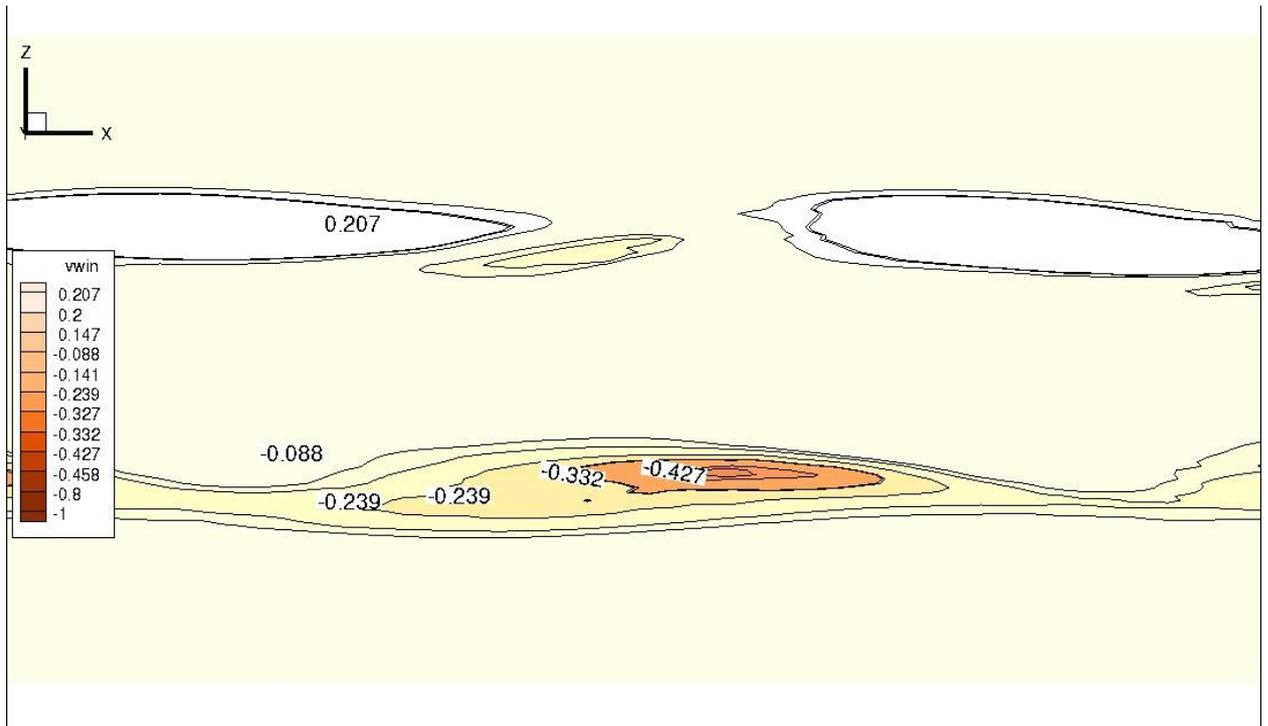
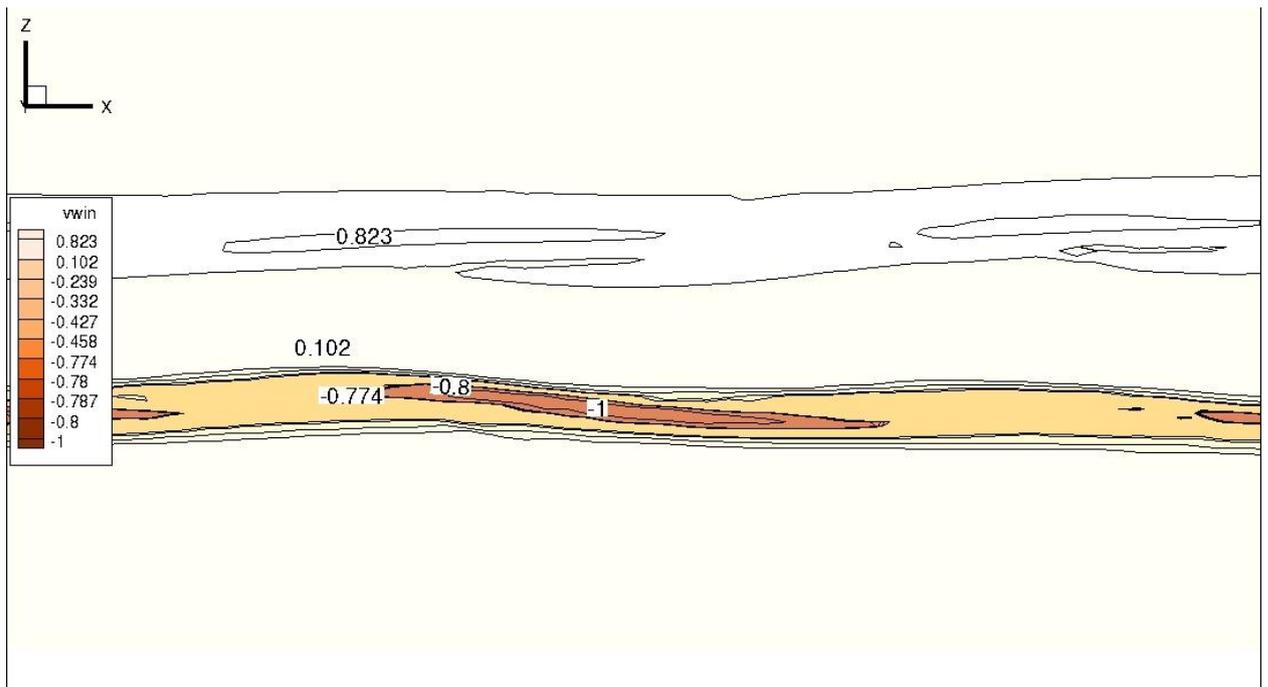


Рис. 5.2.20. Толщина завихренности при вариации M_0



a) $M_\infty = 4$



б) $M_\infty = 6$

Рис. 5.2.21 (а, б). Изолинии завихренностей в сечении z , вихревые структуры

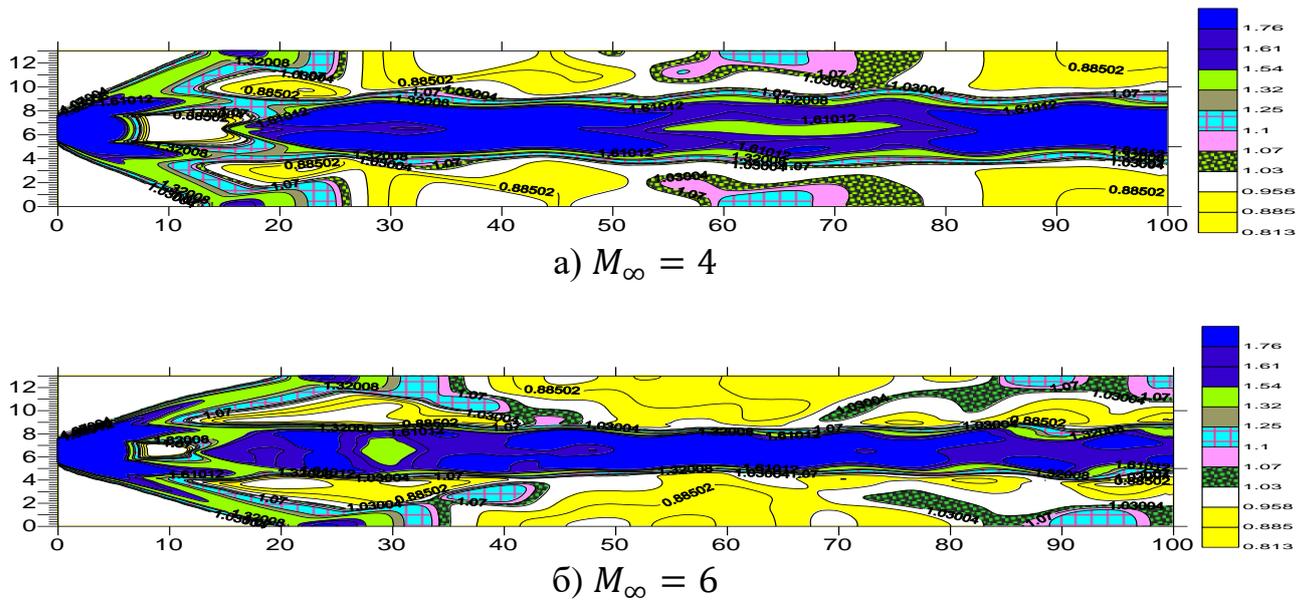


Рис. 5.2.22 (а, б). Картина изолиний плотностей в плоскости симметрии, нормальной к оси y , при вариации числа Маха потока

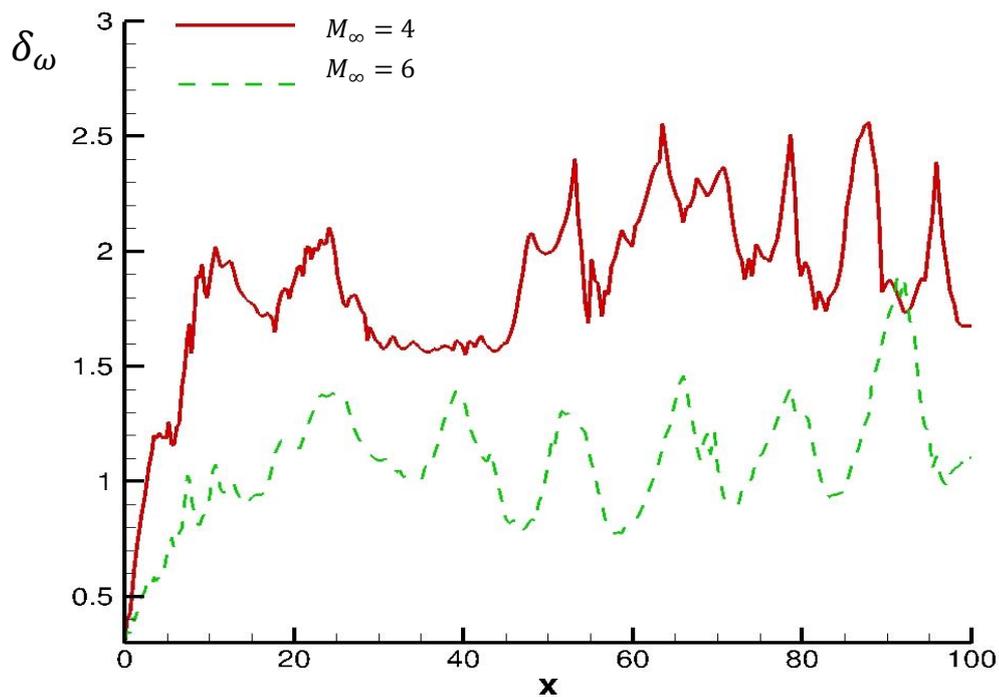


Рис. 5.2.23. Толщина завихренности при вариации числа Маха потока

5.2.2. Численный анализ поведения струи в зависимости от параметров детерминистического возмущения.

Здесь исследуется влияние дополнительного детерминистического возмущения струи на расширение слоя смешения, посредством амплитудного варьирования возмущения. Диапазон амплитуд дополнительного силового

воздействия: $0.001 < A = B < 0.03$. Частота дополнительного возмущения не меняется и равна $\omega = 2\pi/12$.

Основные параметры вариантов расчетов приведены в Таблице 5.2.5. Полученные результаты представлены для двух нерасчетностей $n=2$ (вариант 5, таблица 5.2.3 и вариант 11, таблица 5.2.5) и $n=10$ (вариант 1, таблица 5.2.1 и вариант 12, таблица 5.2.5).

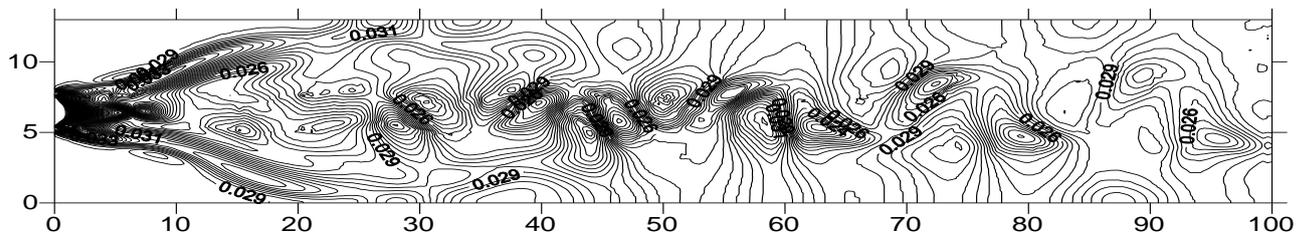
Таблица 5.2.5 – Параметры вариантов расчетов при вариации дополнительного возмущения

Вариант	M_0	M_∞	p_0	p_∞	$T_0 = T_\infty$	u_0	u_∞	n	ω	$A=B$
11	3	5	0.057	0.029	1	0.6	1	2	$2\pi/12$	0.01
12	3	5	0.057	0.029	1	0.6	1	10	$2\pi/12$	0.03

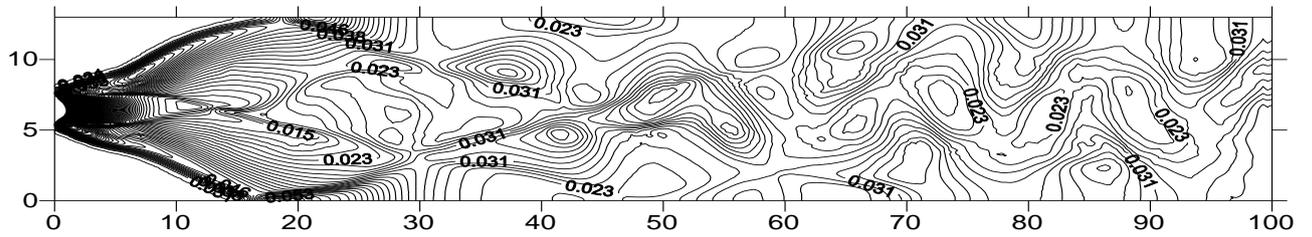
На картине изобар, представленной на Рис. 5.2.24 (а-б) для двух нерасчетностей, видно, что силовое детерминистическое воздействие влияет на фронт ударной волны. Происходит значительное искривление волны, в то же время, сечения, в которых волна достигает условных границ вычислительной области, не меняются. Значит дополнительное возмущение не тормозит и не ускоряет фронт ударной волны.

Влияние дополнительного возмущения на вихреобразование и на слой смешения хорошо видно по картинам распределения завихренности (Рис. 5.2.25 – 5.2.26). Графики демонстрируют, силовое воздействие интенсивно влияет на формирование вихревых структур и к моменту времени $t=3000$ уже видна четкая картина вихреобразования. Причем увеличение амплитуды дополнительного возмущения демонстрирует экспоненциальный рост параметра толщины завихренности, графики которого представлены на Рис. 5.2.27 – 5.2.28. А именно: максимальное значение δ_ω при $A=0.03$ в 2 раза выше как для $n=10$, так и для $n=2$. Это приводит к росту ширины слоя смешения. Также по графикам изолиний завихренности видно, что усиление силового воздействия посредством увеличения его амплитуды не только расширяет зону смешения, но и увеличивает количество вихрей на участке $0 < x < 40 \delta_\theta$. Так, например для $A=0.03$ (Рис. 5.2.25 б – 5.2.26 б) образуется уже 3 вихря, по сравнению с 1 вихрем для $A=0.01$ (Рис. 5.2.25 а – 5.2.26 а) это приводит к укрупнению вихрей разной формы (круглые, эллиптические).

Из представленных результатов резюмируется то, что влияние детерминистического дополнительного возмущения на слой смешения, посредством усиления амплитуды воздействия, приводит к значительному расширению зоны смешения.

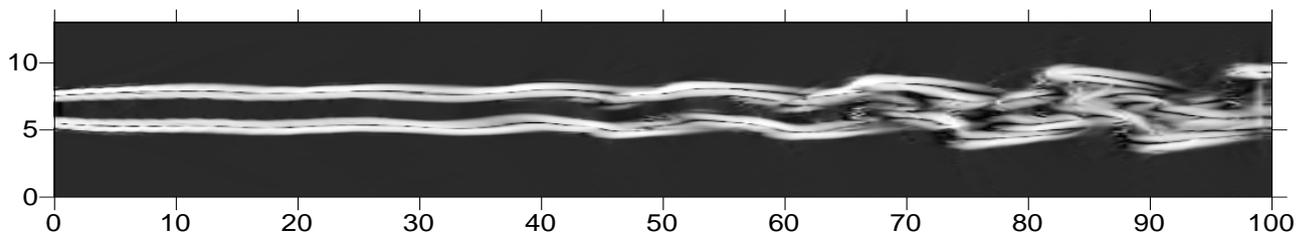


а) $n=2$

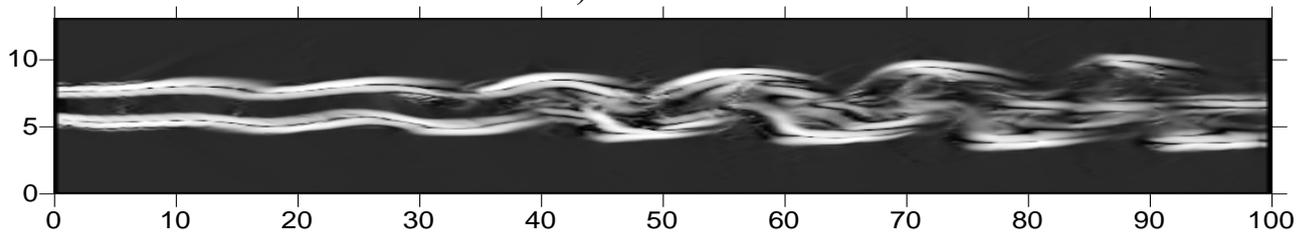


а) $n=10$

Рис. 5.2.24. Картина изобар при увеличенной амплитуде дополнительного возмущения, $A=0.03$



а) $A=0.01$



б) $A=0.03$

Рис. 5.2.25. Картина завихренности для $n=2$ в плоскости симметрии, нормальной к оси y

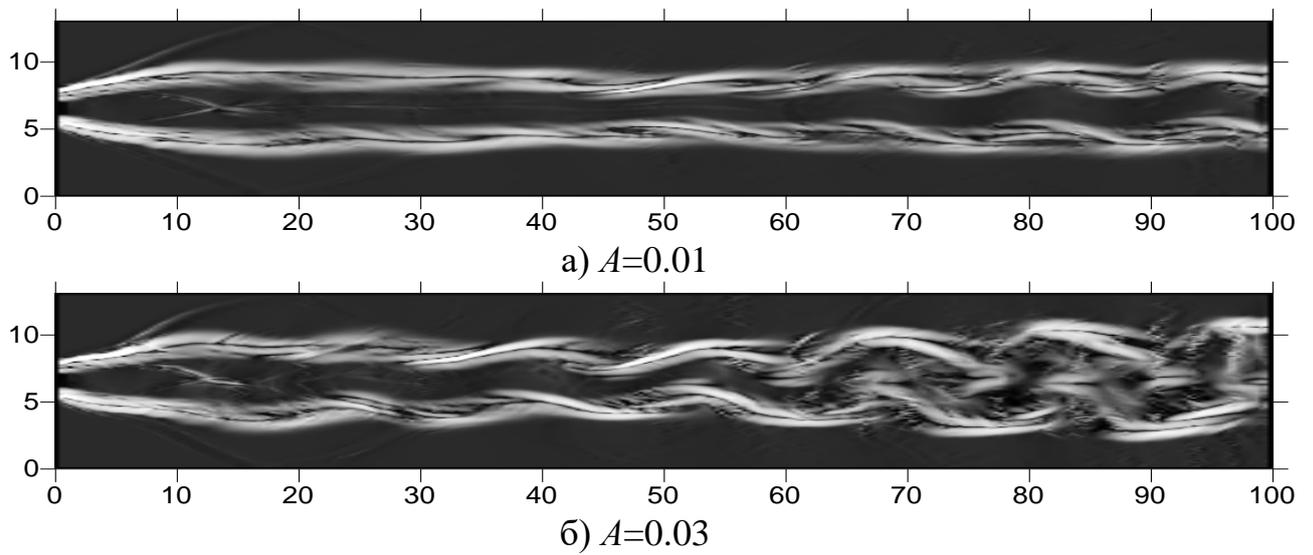


Рис. 5.2.26. Картина завихренности для $n=10$ в плоскости симметрии, нормальной к оси y

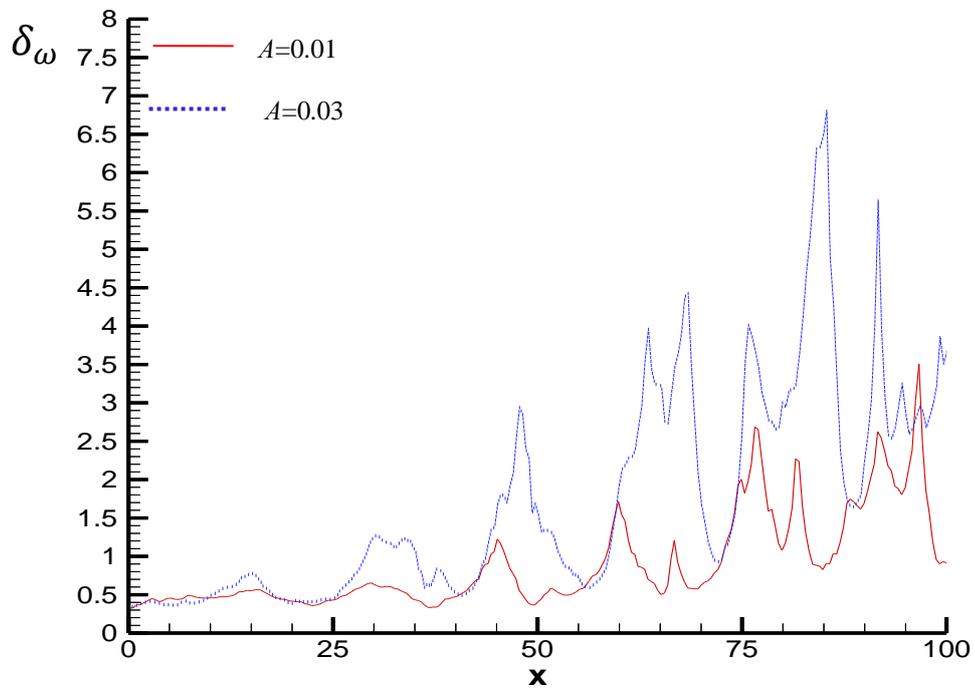


Рис. 5.2.27. Толщина завихренности для нерасчетности $n=2$ при $A=0.01$ и $A=0.03$

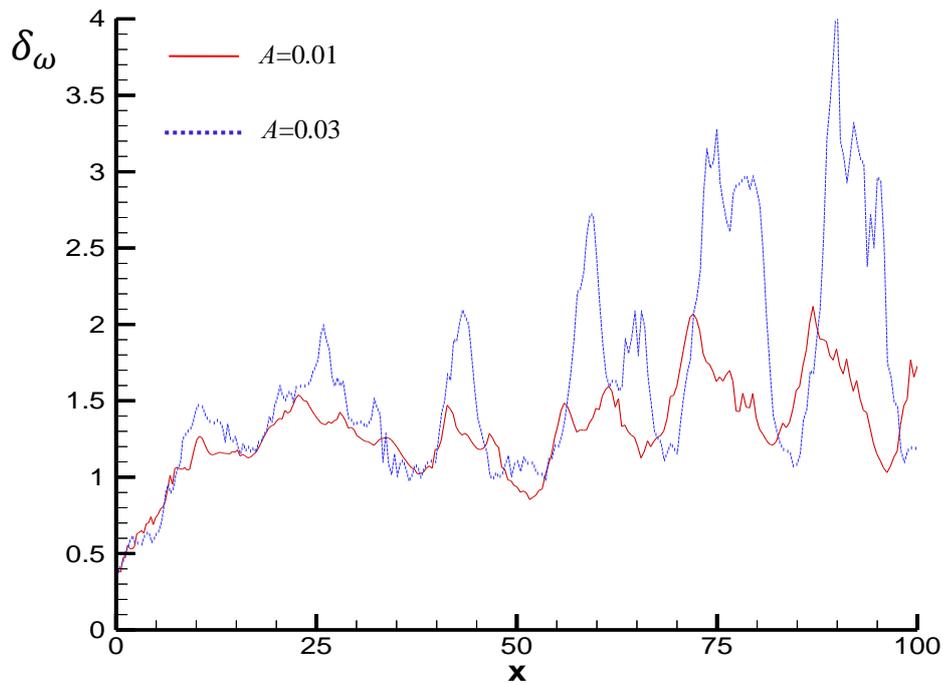


Рис. 5.2.28. Толщина завихренности для нерасчетности $n=10$ при $A=0.01$ и $A=0.03$

Также важно отметить, что в данной главе на один численный эксперимент с использованием вычислительной сетки, состоящей из $271 \times 151 \times 151$ узлов (или 6 179 071 узлов), и на имеющейся вычислительной технике, время компьютерного счета увеличивается примерно в 2.2 раза, по сравнению с экспериментами, проводимыми для проблемы расчетного истечения струи (глава 4), и таким образом один численный эксперимент занимает около 56 часов.

Все численные эксперименты производятся на компьютерах, оперируемых Linux и имеющих следующие характеристики: RAM 64 GB, Intel core i9-13700.

5.3. Выводы.

По полученным результатам сделаны следующие выводы:

1. Изучено влияние режимных параметров (параметр нерасчетности, число Маха струи и потока) на закономерности истечения сверхзвуковой недорасширенной струи с детерминистическим возмущением в спутный сверхзвуковой поток, а именно:

- установлено, что увеличение параметра нерасчетности приводит к дальнобойности струи и запаздыванию процессов смешения, получен обобщающий график зависимости угла падения ударной волны от параметра нерасчетности, где показано, что угол наклона ударной волны линейно возрастает с ростом нерасчетности;
- численно получено, что при возрастании параметра нерасчетности выявляется влияние отраженной ударной волны на струйное течение в силу интенсивности возникающей ударно-волновой структуры;

- выявлено, что увеличение числа Маха потока приводит к вытягиванию вихрей в продольном направлении и, как следствие, к замедлению процесса смешения струи и потока.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе полученных результатов диссертационной работы были сделаны следующие выводы:

- сформулирована математическая модель пространственного сверхзвукового струйного течения в спутном сверхзвуковом потоке на основе осредненных по пространству уравнений Навье-Стокса, решение которых осуществляется с применением существенно-неосциллирующей схемы (ENO-схема) третьего порядка точности, позволяющей производить сквозной расчет без введения искусственной диссипации на разрывах;

- предложены и адаптированы для сверхзвукового течения входные граничные условия, основанные на спектральном генераторе флуктуаций скорости, способные воспроизвести анизотропию вихревых турбулентных структур;

- показана применимость поставленных граничных условий путем численных экспериментов и сравнения с известными опытными данными проблемы сверхзвукового трехмерного турбулентного слоя смешения;

- осуществлена постановка детерминистических граничных условий, генерирующих дополнительные усиления на вдуваемой струе;

- на основе разработанной модели детально изучены закономерности образования турбулентных когерентных структур для расчетного режима вдува круглой сверхзвуковой струи в спутный сверхзвуковой поток, в частности установлено влияние частотного и амплитудного дополнительного возмущения, при этом выявлено, что увеличение частоты налагаемого дополнительного усиления приводит к раннему формированию вихрей и увеличению их в размере, а увеличение амплитуды вызывает значительные колебания слоя смешения вследствие растягивания крупных когерентных структур в поперечном направлении;

- изучено влияние режимных параметров (параметр нерасчетности, число Маха струи и потока) на закономерности истечения сверхзвуковой недорасширенной струи с детерминистическим возмущением в спутный сверхзвуковой поток, а именно:

- а) установлено, что увеличение параметра нерасчетности приводит к дальнобойности струи и запаздыванию процессов смешения, получен обобщающий график зависимости угла падения ударной волны от параметра нерасчетности, где показано, что угол наклона ударной волны линейно возрастает с ростом нерасчетности;

- б) численно получено, что при возрастании параметра нерасчетности выявляется влияние отраженной ударной волны на струйное течение в силу интенсивности возникающей ударно-волновой структуры;

- в) выявлено, что увеличение числа Маха потока приводит к вытягиванию вихрей в продольном направлении и, как следствие, к замедлению процесса смешения струи и потока.

- результаты проведенных в диссертационной работе исследований были опубликованы в 3 статьях в научных изданиях, входящих в перечень рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК для публикации основных результатов научной деятельности [135-138], также в 2 статьях в рейтинговых научных изданиях, индексируемых Scopus и Thompson Reuters (импакт-фактор не менее $IF=0.40$) [139-140]. Также результаты работы были представлены на следующих международных конференциях в виде докладов и рефератов: «Международная научная конференция студентов и молодых ученых ФАРАБИ ЭЛЕМИ» (Алматы, Казахстан, 10-12 апреля 2018 г.); «Традиционная международная апрельская математическая конференция, в честь Дня работников науки Республики Казахстан» (Алматы, Казахстан, 3-5 апреля 2019 г.); «V Международная научно-практическая конференция» (Чехия, Карловы Вары - Россия, Москва, 29-30 апреля 2020 г.), а также на научных семинарах: Института технической термодинамики Технологического университета Карлсруэ (2020 г., Карлсруэ, Германия); Механико-математического факультета КазНУ им. аль-Фараби (2018-2019 гг., Алматы); Института механики и машиностроения (2020 г., Алматы).

Оценка полноты исследования. В ходе численного исследования пространственного сверхзвукового турбулентного истечения струи в спутный сверхзвуковой поток были получены следующие результаты:

- применимость поставленных спектральных граничных условий, способных генерировать анизотропную турбулентность, бликую к реальной;
- путем численных экспериментов проблемы вдува сверхзвуковой струи в спутный сверхзвуковой поток показано, что введение дополнительного детерминистического возмущения на струе приводит к улучшению смешения струи с потоком;
- получены закономерности влияния режимных параметров (параметр нерасчетности, число Маха струи и потока) на рост и формирование слоя смешения для проблемы истечения системы недорасширенных сверхзвуковых струй в спутный сверхзвуковой поток;
- введение детерминистического возмущения в случае вдува системы недорасширенных сверхзвуковых струй имеет существенное влияние на слой смешения, а именно, увеличение амплитуды дополнительного усиления приводит к расширению зоны смешения.

Рекомендации по конкретному использованию полученных результатов. Разработанные в диссертации численная модель и метод решения осредненных по пространству уравнений Навье-Стокса могут быть использованы для расчетов трехмерных сверхзвуковых турбулентных струйных течений, позволяющих прогнозировать поведение реальных трехмерных процессов, возникающих при смешении топлива и окислителя в камерах сгорания ПВРД.

Оценка технико-экономической эффективности реализации. Численное моделирование пространственного истечения сверхзвуковой турбулентной струи в сверхзвуковой поток с использованием LES

моделирования и ENO-схемы высокого порядка точности, постановка входных спектральных граничных условий для генерации анизотропной турбулентности позволяет детально исследовать структуру турбулентного течения, а предложенные граничные условия с дополнительным детерминистическим возмущением приводят к улучшенному смешению, что, в свою очередь, является центральной проблемой при проектировании камер сгорания ПВРД.

Оценка научного уровня выполненной работы в сравнении с достижениями в этой области. Сформулирована численная модель истечения пространственной сверхзвуковой турбулентной струи в сверхзвуковой спутный поток и предложены спектральные граничные условия на входе, генерирующие анизотропную неоднородную турбулентность. На примере проблемы истечения трехмерного сверхзвукового слоя смешения в спутный поток, проведена верификация поставленной численной модели путем сравнения полученных результатов с известными данными эксперимента. Произведено численное моделирование для поставленной проблемы с введением дополнительного детерминистического возмущения, с целью изучения их влияния на формирование и рост слоя смешения, а также проведен амплитудно-частотный анализ детерминистического возмущения, вследствие которого, приводятся рекомендации по выбору амплитуд и частот, приводящих к улучшенному смешению струи со спутным потоком. Выполнены численные эксперименты для проблемы вдува системы недорасширенных сверхзвуковых струй с дополнительными усилениями в сверхзвуковой спутный поток, и изучено влияние режимных параметров (параметр нерасчетности, число Маха струи и потока) на зону смешения струй со спутным потоком, а также показано влияние амплитуды детерминистического возмущения на слой смешения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Бредшоу П. Введение в турбулентность и ее измерение. М.:Мир, 1974.
- 2 Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, теор.физ. 1942, т. 6, № 1-2.
- 3 Pope S. B. PDF Methods For Turbulent Reactive Flows // Prog. Energy Combust. Sci. – 1985. - Vol. 11. - P. 119-192.
- 4 Хинце И.О. Турбулентность, ее механизм и теория. – М.: Физматгиз, 1963. – 680 с.
- 5 Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008. 356 с.
- 6 Michalke A. On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile // J. Fluid Mech – 1964. - №19. - P. 543-556.
- 7 Michalke A. On the spatially growing disturbances in an inviscid shear layer // J. Fluid Mech. – 1965. - №23. – P. 521-544.
- 8 de Bruin I.C.C., Wasistho B., Geurts B.J. & Kuerten J.G.M., Simulation of spatially developing turbulent shear flows, Symposium on Comp. and Exp. Methods in Mechanical and Thermal Eng., Ghent, Belgium, 1998.
- 9 Stanley S. S. Sarkar S. Simulations of spatially developing two-dimensional shear layers and jets // Theoretical Computational Fluid Dynamics. – 1997. – Vol. 9. – P. 121-147.
- 10 Cheng T.S., Lee K.S. Numerical simulations of underexpanded supersonic jet and free shear layer using WENO schemes // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2005. - №26. – P. 755-770.
- 11 Reichert R.S., Biringen S. Numerical simulation of compressible plane jets // Mechanics Research Communications. – 2007. -№34. – P. 249-259.
- 12 Shi, Xiao-Tian & Chen, Jun & Bi, Wei-Tao & Shu, Chi-Wang & She, Zhensu. (2011). Numerical simulations of compressible mixing layers with a discontinuous Galerkin method. Acta Mechanica Sinica. 27. 318-329. 10.1007/s10409-011-0433-0.
- 13 M.M. Rogers and R.D. Moser. The three dimensional evolution of a plane mixing layer: the Kelvin-Helmholtz roll-up. Journal of Fluid Mechanics, 243:183–226, 1992.
- 14 J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. Journal of Fluid Mechanics, 177:133–166, 1987.
- 15 H.J Kaltenbach, M. Fatica, R. Mittal, T.S. Lund, and P. Moin. Study of flow in a planar asymmetric diffuser using large eddy simulation. Journal of Fluid Mechanics, pages 151–185, 1999.
- 16 R. Friedrich and M. Arnal. Analysing turbulent backward-facing step flow with the lowpass-filtered Navier-Stokes equation. Journal of Wind Engineering and its Applications, 35:101–128, 1990.
- 17 M. Breuer and W. Rodi. Large-eddy simulation of turbulent flow through a straight square duct and a 180 bend. In P. Voke, R. Kleiser, and J. Chollet, editors, Direct and Large Eddy Simulation I, volume 26 of Fluid Mechanics and its Applications, pages 273–285, Munich, Germany, 2007.

- 18 K. Akselvoll and P. Moin. Large-eddy simulation of turbulent confined coannular jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 315:387–411, 1996.
- 19 T. Lund, X. Wu, and D. Squires. Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations. *Journal of Computational Physics*, 140:233–258, 1998.
- 20 M. Klein, A. Sadiki, and J. Janicka. A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large-eddy simulations. *Journal of Computational Physics*, 186:652–665, 2003.
- 21 D.J. Glaze and H. Frankel. Stochastic inlet conditions for large-eddy simulation of a fully turbulent jet. *AIAA Journal*, 41(6):1064–1073, 2003.
- 22 R.H. Kraichnan. Diffusion by a random velocity field. *Physics of Fluids*, 13(1):22–31, 1969.
- 23 R.S. Rogallo. Numerical experiments in homogeneous turbulence. Nasa TM-81315, 1981.
- 24 S. Lee, S.K. Lele, and P. Moin. Simulation of spatially evolving turbulence and the applicability of Taylor’s hypothesis in compressible flow. *Physics of Fluids A*, 4(7):1521–1530, 1992.
- 25 W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, Third Edition. Cambridge University Press, New-York, 2007.
- 26 H. Le, P. Moin, and J. Kim. Direct numerical simulation of turbulent flow over backward-facing step. *Journal of Fluid Mechanics*, 330:349–373, 1997.
- 27 Y. Na and P. Moin. Direct numerical simulation of a separated turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 374:379–405, 1998.
- 28 R.A. Handler, E. Levich, and L. Sirovich. Drag reduction in turbulent channel flow by phase randomization. *Physics of Fluids A*, 5(3):686–694, 1993.
- 29 Y.M. Chung and H.J. Sung. Comparative study of inflow conditions for spatially evolving simulation. *AIAA Journal*, 35(2):269–274, 1997.
- 30 J.C. Fung, J.C. Hunt, N.A. Malik, and R.J. Perkins. Kinematic simulation of homogeneous turbulence by unsteady random Fourier modes. *Journal of Fluid Mechanics*, 236:281–318, 1992.
- 31 J. Eggers and S. Grossmann. Effect of dissipation fluctuations on anomalous velocity scaling in turbulence. *Physical Review A*, 45(4):2360–2369, 1992.
- 32 Lars Davidson. Hybrid LES-RANS: Inlet Boundary Conditions for flows including recirculation. Division of Fluid Dynamics, Department of Applied Mechanics Chalmers University of Technology, SE-412 96 Goteborg, Sweden <http://www.tfd.chalmers.se/~lada>, lada@chalmers.se
- 33 Д.Ю. Адамьян, М.Х. Стрелец, А.К. Травин. Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках комбинированных RANS-LES подходов к расчету турбулентных течений. Математическое моделирование 2011 год, том 23, номер 7, стр. 3-19.
- 34 A. Smirnov, S. Shi, I. Celik. Random flow generation technique for large eddy simulations and particle-dynamics modeling. West Virginia University Department of Mechanical and Aerospace Engineering Morgantown, WV26506-6106.

35 Anthony Keating and Ugo Piomelli. Synthetic generation of inflow velocities for large-eddy simulation. 34th AIAA Fluid Dynamic Conference and Exhibit, 28 Jun - 1 Jul 2004.

36 Nicolas Jarrin. Synthetic inflow boundary conditions for the numerical simulation of turbulence. School of Mechanical, Aerospace and Civil Engineering The University of Manchester Manchester M60 1QD, United Kingdom.

37 Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.

38 Вулис Л.А., Кашкаров В.П. Теория струй вязкой жидкости. — М.: Наука, 1965.

39 Абрамович Г.Н. Теория турбулентных струй. — М.: Физматгиз, 1960.

40 M.R. Davis, "Measurements in a subsonic turbulent jet using a quantitative schlieren technique", J. Fluid Mech., vol. 46, part 4, pp. 631-656, 1971.

41 F.H Champagne, I.J Wygnanski, An experimental investigation of coaxial turbulent jets, International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 14, Issue 9, 1971, Pages 1445-1464, ISSN 0017-9310.

42 R.A. Antonia, R.W. Bilger, An experimental investigation of anaxisymmetric jet in a co flowing air stream. J. Fluid Mech. 61, 805–822 (1973).

43 Smoot, L. Douglas. "Turbulent mixing coefficients for compressible coaxial submerged andcoflowing jets." AIAA Journal 14.12 (1976): 1699-1705.

44 Catalano, G. D., J. B. Morton, and R. R. Humphris. "Experimental investigation of an axisymmetric jet in a coflowing airstream." AIAA Journal 14.9 (1976): 1157-1158.

45 Morris, Philip J. "Turbulence measurements in subsonic and supersonic axisymmetric jets in a parallel stream." AIAA journal 14.10 (1976): 1468-1475.

46 Gladnick, P. G., et al. "Near-field characteristics of a turbulent coflowing jet." AIAA journal 28.8 (1990): 1405-1414.

47 Hussein, Hussein J., Steven P. Capp, and William K. George. "Velocity measurements in a high-Reynolds-number, momentum-conserving, axisymmetric, turbulent jet." Journal of Fluid Mechanics 258 (1994): 31-75.

48 Nickels, T. B., and A. E. Perry. "An experimental and theoretical study of the turbulent coflowing jet." Journal of Fluid Mechanics 309 (1996): 157-182.

49 Borean, J-L., D. Huilier, and H. Burnage. "On the effect of a co-flowing stream on the structure of an axisymmetric turbulent jet." Experimental thermal and fluid science 17.1-2 (1998): 10-17.

50 Charonko, John J., and Katherine Prestridge. "Variable-density mixing in turbulent jets with coflow." Journal of Fluid Mechanics 825 (2017): 887-921.

51 Davis, M. R. "Quantitative schlieren measurements in a supersonic turbulent jet." Journal of Fluid Mechanics 51.3 (1972): 435-447.

52 Samimy, Mo, et al. "Active Control of Supersonic Jets Operating in Various Flow Regimes." 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. 2008.

53 Sharma, H., et al. "Experimental study of overexpanded co-flowing jets." The Aeronautical Journal 112.1135 (2008): 537-546.

54 Sharma, Hemant, et al. "Characteristics of sonic and supersonic co-flow jets." 2nd International conference on recent advances in experimental fluid mechanics. 2008.

55 Satyajit, De, and Ethirajan Rathakrishnan. "Experimental study of supersonic co-flowing jet." Proceedings of the institution of mechanical engineers, Part G: Journal of aerospace engineering 233.4 (2019): 1237-1249.

56 De Gregorio, Fabrizio, and Floriana Albano. "Free compressible jet nozzle investigation." Proceedings of the 16th International Symposia on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal. 2012.

57 Gnani, Francesca, et al. "Shock wave diffraction in the presence of a supersonic co-flow jet." *Shock Waves* 26 (2016): 253-262.

58 Hatanaka, Kazuaki, and Tsutomu Saito. "Influence of nozzle geometry on underexpanded axisymmetric free jet characteristics." *Shock Waves* 22 (2012): 427-434.

59 Maidi, Mohamed, and Marcel Lesieur. "Large eddy simulations of spatially growing subsonic and supersonic turbulent round jets." *Journal of Turbulence* 6 (2005): N38.

60 Bogey, Christophe, and Christophe Bailly. "Large eddy simulations of transitional round jets: influence of the Reynolds number on flow development and energy dissipation." *Physics of Fluids* 18.6 (2006).

61 Datta, Abanti, and Kalyan Prasad Sinhamahapatra. "Investigation of the Influence of Convective Mach Number on Compressible Plane Jet Exhausting into Parallel Streams." *Journal of The Institution of Engineers (India): Series C* 99 (2018): 401-412.

62 Thaker, Parth, and Somnath Ghosh. "Effect of Co-flow Velocity Ratio on Compressible Round Jet: An LES Study." *AIAA Scitech 2019 Forum*. 2019.

63 Thaker, Parth, and Somnath Ghosh. "Large eddy simulation of compressible round jets with coflow." *International Journal of Heat and Fluid Flow* 87 (2021): 108744.

64 Kumar, Bholu, Suresh Kant Verma, and Shantanu Srivastava. "Mixing Characteristics of Supersonic Jet from Bevelled Nozzles." *International Journal of Heat & Technology* 39.2 (2021).

65 Bonelli, Francesco, Annarita Viggiano, and Vinicio Magi. "High-speed turbulent gas jets: An LES investigation of Mach and Reynolds number effects on the velocity decay and spreading rate." *Flow, Turbulence and Combustion* 107.3 (2021): 519-550.

66 Hiejima, Toshihiko. "Streamwise vortex breakdown due to the interaction with crossed shock waves." *Journal of Fluid Mechanics* 973 (2023): A41.

67 Angelino, M., Xia, H. and Page, G.J. Influence of grid resolution on the spectral characteristics of noise radiated from turbulent jets: sound pressure fields and their decomposition, *Comput. Fluids*, 2020, 196, p 104343.

- 68 Wang, Z.-N., Naqavi, I., Tucker, P.G. and Boehning, P. Large-eddy simulation of the flight stream effects on single streamheated jets, AIAA 2017-0457, 55th AIAA Aerospace Sciences Meeting, Grapevine, USA, 2017.
- 69 Najafi-Yazdi, A., Brňs, G.A. and Mongeau, L. An acoustic analogy formulation for moving sources in uniformly moving media, Proc. R. Soc. A, 2011, 467, pp 144–165.
- 70 Uzun, A. and Hussaini, Y. Some issues in large eddy simulations for chevron nozzle jet flows, AIAA J. Propulsion Power, 2012, 28, pp 246–258.
- 71 Xia, H. and Tucker, P.G. Numerical simulations of single stream jets from a serrated nozzle, Flow Turbulence Comb., 2012, 88, pp 3–18.
- 72 Depuru Mohan, N.K., Dowling, A.P., Karabasov, S.A., Xia, H., Graham, O., Hynes, T.P. and Tucker, P.G. Acoustic sources and far-field noise of chevron and round jets, AIAA J., 2015, 53, pp 2421–2435.
- 73 Lighthill, M. J. 1952 On sound generated aerodynamically. Proc. R. Soc. of London Ser. A. 211, 564-587.
- 74 Lighthill, M. J. 1954 On sound generated aerodynamically: II. Turbulence as a source of sound. Proc. R. Soc. of London, Ser. A. 222, 1-32.
- 75 Choi, D., Barber, T. J., & Chiappetta, L. M. 1999 Large eddy simulation of High-Reynolds number jet flows. AIAA paper 99-0230.
- 76 Boersma, B. J. & Lele, S. K. 1999 Large eddy simulation of Mach 0.9 compressible jet. AIAA paper 99-1874.
- 77 Bailly, Christophe, Philippe Lafon, and Sébastien Candel. "Subsonic and supersonic jet noise predictions from statistical source models." AIAA journal 35.11 (1997): 1688-1696.
- 78 Boersma, B. J. & Lele, S. K. 1999 Large eddy simulation of Mach 0.9 compressible jet. AIAA paper 99-1874.
- 79 Rona, Aldo, and Xin Zhang. "Time accurate numerical study of turbulent supersonic jets." Journal of Sound and Vibration 270.1-2 (2004): 297-321.
- 80 Uzun, Ali, Gregory A. Blaisdell, and Anastasios S. Lyrintzis. "Application of compact schemes to large eddy simulation of turbulent jets." Journal of Scientific Computing 21 (2004): 283-319.
- 81 Gao, Junhui, Xin Xu, and Xiaodong Li. "Numerical simulation of supersonic twin-jet noise with high-order finite difference scheme." AIAA Journal 56.1 (2018): 290-300.
- 82 Towne, Aaron, et al. "Resolvent-Based Estimation of Wavepackets in Turbulent Jets." 30th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (2024). 2024.
- 83 Wu, Gao Jun, Olivia G. Martin, and Sanjiva K. Lele. "Computational Aeroacoustic Study of Coannular Nozzles with Internal Mixing Geometries at High Transonic Mach Numbers." 30th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (2024). 2024.
- 84 Viswanath, K. and Czech, M.J. Adaptation of the bevelled nozzle for high-speed jet noise reduction, AIAA J., 2011, 49, pp 932–044.

85 Viswanath, K., Spalart, P.R., Czech, M.J., Garbaruk, A. and Shur, M. Tailored nozzles for jet plume control and noise reduction, *AIAA J.*, 2012, 50, pp 2115–2134.

86 Tam, C.K.W. and Zaman, K.B.M.Q. Subsonic jet noise from non-axisymmetric and tabbed nozzles, *AIAA J.*, 2000, 38, pp 592–599.

87 Behrouzi, P., Feng, T. and McQuirk, J.J. Active flow control of jet mixing using steady and pulsed fluid tabs, *Proc. I. Mech. E. J. Syst. Control Eng.*, 2008, 222, pp 381–392.

88 Prasad, C. and Morris, P.J. Effectiveness of fluid injection on supersonic jet noise at high exhaust temperatures, *AIAA 2020-0001*, *AIAA SciTech Forum*, Orlando, USA, 2020.

89 Prasad, C. and Morris, P.J. A study of noise reduction mechanisms of jets with fluid inserts, *J. Sound Vib.*, 2020, 476, 115331.

90 Zaman, K. B. M. Q. and Hussain, A. K. M. F. Vortex Pairing in a Circular Jet under Controlled Excitation, Part 1. General Jet Response// *J. Fluid Mech.* – 1980. V.101, pp. 449-491.

91 Gutmark, E. and Ho C-M. Preferred modes and the spreading rates of jets // *Phys. Fluids.* – 1983. Vol. 26, pp. 2932–2938.

92 Szajner, A. and Turner, J. T. Visualisation of an aerodynamically excited free jet // *Proc. Int. Conf. on Flow Visualization*, (Paris, France). – 1986. Vol. 4, pp. 533–9.

93 Reeder, M. F. and Samimy, M. Evolution of a jet with vortex-generating tabs: real-time visualization and quantitative measurements // *J. Fluid Mech.* – 1996. V.311, pp. 73–118.

94 Toyoda, K. and Mori, H. Three-dimensional Vortical Structure and Mixing Mechanism of a Circular Jet // *Journal of Visualization.* - 2001. Vol. 4, No.3, pp. 239-244.

95 Samimy, M., Snyder, R. M., Kim, J.-H, Adamovich, I. and Nishihara, M. Active Control of Supersonic Jets Operating in Various Flow Regimes // *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 7-10 January, 2008, Reno, Nevada.

96 Samimy, M., Kim, J.-H., Fischer, M. K. and Sinha, A. Acoustic and flow fields of an excited high Reynolds number axisymmetric supersonic jet // *J. Fluid Mech.* – 2010. Vol. 656, pp. 507– 529.

97 Fischer, M. K., and Samimy, M. Noise Control of a High Reynolds Number Mach 1.3 Heated Jet Using Plasma Actuators // *48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, 4-7 January, 2010, Orlando, Florida.

98 Kamran, Muhammad A., and James J. McQuirk. "Subsonic jet mixing via active control using steady and pulsed control jets." *AIAA journal* 49.4 (2011): 712-724.

99 Gohil, Trushar B., Arun K. Saha, and K. Muralidhar. "Direct numerical simulation of forced circular jets: Effect of varicose perturbation." *International journal of heat and fluid flow* 44 (2013): 524-541.

- 100 Goparaju, Kalyan, Datta V. Gaitonde, and Mei Zhuang. "Numerical Study of the Active Control of Underexpanded Jets." 52nd Aerospace Sciences Meeting. 2014.
- 101 Kamran, Muhammad A., and James J. McGuirk. "Unsteady predictions of mixing enhancement with steady and pulsed control jets." *Aiaa Journal* 53.5 (2015): 1262-1276.
- 102 Gohil, Trushar B., Arun K. Saha, and K. Muralidhar. "Direct numerical simulation of free and forced square jets." *International Journal of Heat and Fluid Flow* 52 (2015): 169-184.
- 103 Goparaju, Kalyan, and Datta V. Gaitonde. "Large-Eddy simulation of plasma-based active control on imperfectly expanded jets." *Journal of Fluids Engineering* 138.7 (2016): 071101.
- 104 Shahsavari, Mohammad, et al. "Response of supercritical round jets to various excitation modes." *Journal of Fluid Mechanics* 915 (2021): A47.
- 105 Yuan, C. C. L., Krstic', M. and Bewley, T. R. Active control of jet mixing // *IEE Proc.- Control Theory Appl.* – 2004. Vol. 151, No. 6, November, pp. 763-772.
- 106 Nathana, G. J., Mia, J., Alwahabib, Z. T., Newbolda, G. J. R., Nobesa, D. S. Impacts of a jet's exit flow pattern on mixing and combustion performance // *Progress in Energy and Combustion Science.* – 2006. V.32, pp. 496–538.
- 107 Vandsburger, U. and Yuan, Y. Turbulent Jet Mixing Enhancement and Control Using SelfExcited Nozzles // *Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering.* – 2007. Vol. 129, pp. 842-65
- 108 Heidt, L., Colonius, T., Nekkanti, A., Schmdit, O., Maia, I. & Jordan, P. Analysis of forced subsonic jets using spectral proper orthogonal decomposition and resolvent analysis // *In AIAA Aviation.* – 2021. Forum, p. 2108.
- 109 Anirudh Lakshmi Narasimha Prasad and S. Unnikrishnan // *Flow-field and Acoustics of Azimuthally Forced Rectangular Jets.* – 2023. AIAA Aviation Conference, 12-16 June, San Diego, CA and Online.
- 110 Igor A. Maia, Peter Jordan, Andr'e V. G. Cavalieri, Eduardo Martini. Closed-loop control of forced turbulent jets // *arXiv: Fluid Dynamics.* – 2020. P.1-5.
- 111 Xiaopeng Li, E. Fan, Wei Yao, Xuejun Fan. Numerical investigation of characteristic frequency excited highly underexpanded jets // *Aerosp. Sci. Technol.* – 2017. V. 63, p. 304–316.
- 112 A. Tyliszczak, B.J. Geurts. Parametric analysis of excited round jets – numerical study // *Flow Turbul. Combust.* – 2014. V. 93, p. 221–247.
- 113 A. Tyliszczak, B.J. Geurts. Controlled mixing enhancement in turbulent rectangular jets responding to periodically forced inflow conditions // *J. Turbul.* – 2015. 16 (8), p. 742–771.
- 114 Bo Kong, Ting Li, Qitai Eri. Large eddy simulation of turbulent jet controlled by two pulsed jets: Effect of forcing frequency // *Aerospace Science and Technology.* – 2019. V. 89, p. 356-369.

115 R. B. Zhang, L. Hong. The Numerical Simulation of Jet Mixing With Steady and Antisymmetric Pulsed Jets in Different Frequency // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 28-30 December, 2016, Hong Kong.

116 Shaabani-Ardali, L., Sipp, D. & Lesshafft, L. Vortex pairing in jets as a global floquet instability: modal and transient dynamics // J. Fluid Mech. – V. 2019. 862, p.951–989.

117 Беляев Е.К. Численное исследование взаимодействия сверхзвукового реагирующего потока с параллельно и поперечно инжектируемой струей топлива: дис. ... док. филос. (PhD) : 6D060300. – Алматы, 2014. – 159 с.

118 Nicolas Jarrin. Synthetic inflow boundary conditions for the numerical simulation of turbulence. School of Mechanical, Aerospace and Civil Engineering The University of Manchester Manchester M60 1QD, United Kingdom.

119 Kraichnan R.H. Diffusion by a random velocity field // Physics of Fluids. – 1969. – Vol. 13, No 1. – P. 22–31.

120 A. Beketaeva, P. Bruel and A. Naimanova, “Vortical structures behind a transverse jet in a super-sonic flow at high jet to crossflow pressure ratios”, J. Appl. Mech. and Tech. Phys., Vol. 56, No 5, pp. 777-788– 2015.

121 A. Beketaeva, A. Naimanova, “Flow structure of the transverse jet interaction with supersonic flow for moderate to high pressure ratios”, International journal of mechanics, Vol.12, pp. 88-95, 2018.

122 Бекетаева А.О. Численное исследование сверхзвукового течения с поперечным вдувом струй: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. – Алматы, 2006. – 134 с.

123 M. Samimy and G.S. Elliott. "Effects of compressibility on the characteristics of free shear layers", AIAA Journal, Vol. 28, No. 3, pp. 439-445, 1990.

124 A. Tyliszczak and L. Kuban, “Modelling of liquid sprays in excited jet using large eddy simulation”, TSFP digital library, Vol. 5, 2007

125 Tsujimoto, Koichi, et al. "Evaluation of jet mixing rate based on dns datas of excitation jets." Fifth International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena. Begel House Inc., 2007.

126 Фрост У., Моулден Т. Турбулентность, принципы и применения. – М.: «МИР», 1980. – 535 с.

127 N.D. Sandham and W.C. Reynolds, “Compressible Mixing Layer: Theory and Direct Simulation”, AIAA Journal, Vol.28, №4, pp.618-623, 1989.

128 T.J. Poinso, S.K. Lele, “Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows”, Journal of Computational Physics, № 101, pp.104-129, 1992.

129 Бондарев Е.Н, Лисичко И.Д. Распространение недорасширенной турбулентной струи в спутном сверхзвуковом потоке // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1974. - № 4. - С. 36 - 41.

130 Бай Ши-И. Теория струй. - Москва: Физматгиз, 1960. - 320 с.

131 Ломков К.Э. К вопросу об интенсификации сверхзвукового смешения и горения в камере сгорания ГПВРД с помощью пространственных эффектов // *Аэромеханика и газовая динамика*. – 2001. - № 1. - С. 56 - 65.

132 Мышенков В.И. Расчет течения вязкой ламинарной сверхзвуковой струи в спутном потоке // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 1979. - Т.19, № 2. - С. 474 - 485.

133 Дейч М.Е. *Техническая газодинамика*. - Москва: Энергия, 1974.- 592 с.

134 Актаев Е.К. Исследование системы плоских сверхзвуковых струй в спутном гиперзвуковом потоке: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. – Алматы: КазГУ, 2001. – 122 с.

135 Липман Г.В., Рошко А. *Элементы газовой динамики*. – Москва: Изд-во иностранной литературы, 1960. – 518 с.

136 Adilova M. Ye., Manapova A.K, Zadauly A.E. Study of the interaction of a horizontal jet with a flow with a speed higher than the speed of sound due to changes in pressure // *Vestnik of Abai Kazakh National University, series "Physico-mathematical sciences"*, Alamy. – 2018. - №1(61). С. 11-22.

137 Beketaeva, A.O., Zadauly. A.E. Influence of slit sizes on the interaction structure of supersonic turbulent air flow with a multi-component injection jet in a channel // *International Journal of Mathematics and Physics, Almaty*. – 2018. – Vol.9, №2, 72. P. P. 72-85.

138 Zadauly. A.E., Beketaeva, A.O. Numerical simulation of a supersonic turbulent compressible jet in a co-flow with stochastic spectral inflow boundary conditions // *International Journal of Mathematics and Physics, Almaty*. – 2020. – Vol.11, №1, 20. P. P. 20-27.

139 Zadauly A., Beketaeva A., Naimanova A., Numerical Simulation of the Spatial Turbulent Mixing Supersonic Forced Jets in Coflow // *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*. – 2019. – Vol. 14, Art. 8. – P. 70-78 Scopus, Percentile 48) / E-ISSN: 1790-5087 / 2224-347X.

140 Beketaeva, A.O., Naimanova, A.Z., Shakhan, N., Zadauly, A. Simulation of the shock wave boundary layer interaction in flat channel with jet injection.// *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik* – 2023. – Vol. 103, № 8. –P. 1–19.